

# 8

## الدرس

# الاحتمالات

### 1 - الاحتمالات المتساوية على مجموعة منتهية

#### 1-1 احتمال حادثة (تذكير)

- بصفة عامة نرمز بـ  $e_1, e_2, \dots, e_n$  إلى النتائج الممكنة أو الخارج لتجربة عشوائية، نقول عن هذه التجربة أنها تحتوي على عدد منته من الخارج ونرمز بـ  $\Omega$  إلى مجموعة الإمكانات ونكتب  $\Omega = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ .

- الحادث  $A$  هو مجموعة جزئية من مجموعة الإمكانات

- الحادث الأولي هو حادث يشمل إمكانية واحدة مثل  $A = \{e_1\}$ .

نرفق بكل حادث أولي  $\{e_i\}$  العدد  $p_i = p(e_i)$  الذي يسمى احتمال الحادث  $\{e_i\}$

$$\text{مع } 0 \leq p_i \leq 1 \text{ و } \sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

نقول عندئذ أننا عرفنا احتمال على  $\Omega$ .

- احتمال الحادث  $A$  نرمز له بـ  $P(A)$  وهو مجموع احتمالات الحوادث الأولية المحتواة في  $A$ .

إذا كان  $p(\Omega) = 1$  نقول أن  $\Omega$  حادث أكيد.

وإذا كان  $p(\phi) = 0$  نقول أن  $\phi$  حادث مستحيل.

- نقول عن حوادث أولية أنها متساوية الاحتمال إذا كان  $p_i = p_j$  وهذا مهما كان العدان  $i$  و  $j$ .

إذا كان هذا العدد هو  $n$  فإن  $p_i = \frac{1}{n}$  واحتمال الحادث  $A$  يعطى بـ:

$$P(A) = \frac{\text{عدد عناصر } A}{\text{عدد عناصر } \Omega} = \frac{\text{عدد الحالات الالتمة لتحقيق } A}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$



- تساوي الاحتمال هو فرض نستنتجه من النص بواسطة تعابير مثل زهرة ترد متجانسة، رمي قطعة نقدية متزنة أو اختيار كرة عشوائية من بين  $n$  كرة موجودة في كيس. وللحصول على تساوي الاحتمال يجب أن تكون مجموعة الإمكانات مشكلة من  $n$  مخرج، لأنه إذا بدلنا هذه المجموعة بمجموعة أخرى حتى ولو كان الاختيار فيها عشوائياً، فإن تساوي الاحتمال بشكل عام غير محقق (نفقده).

### مثال -

كيس يحتوي على 7 كرات، منها 4 حمراء و 3 بيضاء، نسحب عشوائياً كرة ونسجل لونها. • إذا أخذنا مجموعة الإمكانات  $\{R_1, R_2, R_3, R_4, B_1, B_2, B_3\}$  فإن كل حدث أولي له احتمال  $\frac{1}{7}$  لكن إذا أخذنا مجموعة الإمكانات  $\{R, B\}$  واخترنا كرة عشوائية فإن الحادثتين الأوليتين  $\{R\}, \{B\}$  غير متساويتي الاحتمال لأن:  $P(B) = \frac{3}{7}$  و  $P(R) = \frac{4}{7}$ .

- الحادث  $\bar{A}$  هو مجموعة الخارج (الإمكانات) التي تنتمي إلى  $\Omega$  ولا تنتمي إلى  $A$  ويسمى بالحادث العكسي للحادث  $A$  ولدينا:  $\bar{A} \cup A = \Omega$  لأن  $P(A) + P(\bar{A}) = 1$ .  
- ليكن  $A$  و  $B$  حادثان كيفيان.  
• الحادث  $A \cap B$  (أو  $B$ ) هو الحادث المشكل من مخارج تنتمي في نفس الوقت إلى  $A$  و  $B$  والذي يتحقق إذا تحقق  $A$  و  $B$  في نفس الوقت.  
• الحادث  $A \cup B$  (أو  $B$ ) هو الحادث المشكل من مخارج تنتمي على الأقل إلى واحدة من الحادثين  $A$  و  $B$  والذي يتحقق إذا تحقق على الأقل حادث واحد من الحادثين  $A$  و  $B$ .  
-  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ .  
وإذا كان  $A$  و  $B$  حادثين غير متلائمين ( $A \cap B = \emptyset$ ) فإن  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ .  
وبشكل عام إذا كان  $A$  هو اتحاد حوادث  $A_1, A_2, \dots, A_n$  غير متلائمة متنى متنى فإن:  $P(A) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$  ويمكن إثبات ذلك بالتراجع.

### 1 - 2 المتغير العشوائي وقانون الاحتمال

لتكن  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$  مجموعة الإمكانات لتجربة عشوائية التي نعرف عليها احتمال. حالاً نفرق كل مخرج لتجربة عشوائية بعدد حقيقي نكون قد عرفنا متغير عشوائي على  $\Omega$  والذي نرمز له بـ  $X$ ،  $Y$ ،  $Z$ ، ...  
نقول أن المتغير العشوائي  $X$  هو دالة من  $\Omega$  في  $\mathbb{R}$ .  
نرمز بـ  $x_1, x_2, \dots, x_n$  إلى قيم  $X$  حيث  $q \leq n$ .  
الحادث " $X$  يأخذ القيمة  $x_i$ " يرمز له بـ  $(X = x_i)$  واحتماله هو  $p_i$  ونكتب  $p_i = P(X = x_i)$ .  
الحادث  $(X = x_i)$  هو الحادث الذي يشمل كل المخارج التي صورها بـ  $x_i$  هي مجموعة الثنائيات  $(x_i, p_i)$  بالتعريف هي قانون احتمال للمتغير العشوائي  $X$  وبشكل عام نعرضه في جدول.

نقول عندما أننا عرفنا قانون احتمال للمتغير العشوائي  $X$  انطلاقاً من الاحتمال العرف على  $\Omega$ .

### مثال -

نرمي حجر نرد متجانس مرقم من 1 إلى 6، نربح 10 دج إذا ظهر الرقم 1 ونربح 50 دج إذا ظهر الرقم 6، ونخسر 20 دج إذا ظهرت الأرقام الأخرى.  $X$  هو المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة الربح (أو الخسارة) المناسبة لها. عيّن قانون احتمال المتغير العشوائي  $X$ .

الحل ✓

قيم المتغير العشوائي هي 10، 50، -20			
$p'_2 = P(X=50) = \frac{1}{6}$	$p'_1 = P(X=10) = \frac{1}{6}$		
$p'_3 = P(X=-20) = \frac{4}{6}$			

### 1 - 3 الأمل الرياضي - التباين - الانحراف المعياري

- الأمل الرياضي للمتغير العشوائي  $X$  نرمز له بـ  $E(X)$  والعرف بـ:  
 $E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \times P(X=x_i) = \sum_{i=1}^n x_i p'_i$   
- التباين للمتغير العشوائي  $X$  نرمز له بـ  $V(X)$  والعرف بـ:  
 $V(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 \times p'_i$  أو  $V(X) = \sum_{i=1}^n x_i^2 p'_i - E^2(X) = E(X^2) - (E(X))^2$   
- الانحراف المعياري للمتغير العشوائي  $X$  هو  $\sigma(X)$  حيث  $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

### تمرين تدريبي 1

$E$  مجموعة الأعداد الطبيعية المحصورة من 10 إلى 30. نختار عشوائياً عدداً من  $E$  ولنعتبر الحوادث  $A, B, C$  التالية:  
"الحادث  $A$  العدد المختار مضاعف لـ 3"  
"الحادث  $B$  العدد المختار مضاعف لـ 2"  
"الحادث  $C$  العدد المختار مضاعف لـ 6"  
احسب  $P(A \cup C), P(A \cap C), P(A \cup B), P(A \cap B), P(C), P(B), P(A)$

الحل ✓

العبارة "نختار عشوائياً" تعني أننا موجودون في حالة تساوي الاحتمال. عدد عناصر المجموعة  $E$  هو 21 عنصراً، إذن هناك 21 حادث أولي متساوي الاحتمال. توجد 7 أعداد من  $E$  مضاعفة للعدد 3، إذن عدد عناصر  $A$  هو 7 وبالتالي  $P(A) = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$



- يوجد 11 عنصرا من  $E$  مضاعف للعدد 2 لأن  $\left(\frac{30-10}{2} + 1 = 11\right)$

إذن عدد عناصر  $B$  هو 11 وبالتالي  $P(B) = \frac{11}{21}$

- يوجد 4 أعداد من  $E$  مضاعفة للعدد 6 وبالتالي عدد عناصر  $C$  هي 4

إذن  $P(C) = \frac{4}{21}$

- الحدث  $A \cap B$  هو "العدد المختار مضاعف لـ 2 ومضاعف لـ 3" أي مضاعف لـ 6

إذن  $A \cap B = C$  وبالتالي  $P(A \cap B) = P(C) = \frac{4}{21}$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(C) = \frac{7}{21} + \frac{11}{21} - \frac{4}{21} = \frac{14}{21}$

- بما أن  $C$  محتواة في  $A$  فإن  $A \cap C = C$

إذن  $P(A \cap C) = P(C) = \frac{4}{21}$  و  $P(A \cup C) = P(A) = \frac{7}{21}$

### تمرين تدريبي 2

كيس يحتوي على 5 كرات، ثلاث منها لونها أسود مرقمة بـ 1، 2، 3، وكرتان لونهما أبيض مرقمتان بـ 1، 2. نسحب عشوائيا كرتين في نفس الوقت من الكيس ونسمي  $X$  المتغير العشوائي الذي يرقق بكل سحب عدد الكرات البيضاء.

(أ) أعط مجموعة قيم  $X$ .

(ب) حدد قانون احتمال  $X$ .

(ج) احسب الأمل الرياضي والانحراف المعياري.

✓ الحل

مجموعة الإمكانات هي  $\left\{ \begin{matrix} N_2 B_1, N_1 B_2, N_1 B_1 \\ N_3 B_2, N_3 B_1, N_2 B_2 \\ N_2 N_3, N_1 N_3, N_1 N_2, B_1 B_2 \end{matrix} \right\}$  عدد الإمكانات هو 10.

(أ) في كل السحب نتحصل إما على كرتين لونهما أبيض أو كرة واحدة بيضاء أو لا نتحصل على أية كرة بيضاء وبالتالي مجموعة قيم  $X$  هي 0، 1، 2.

(ب) الحدث  $(X=0)$  هو ظهور كرتين سوداويتين وعدد عناصر الحدث  $(X=0)$  هو 3.

إذن  $P_1 = P(X=0) = \frac{3}{10}$

- الحدث  $(X=1)$  هو ظهور كرة بيضاء وكرة سوداء وعدد عناصر هذا الحدث هو 6.

إذن  $P_2 = P(X=1) = \frac{6}{10}$

- الحدث  $(X=2)$  هو ظهور كرتين بيضاويتين وعدد عناصر هذا الحدث هو 1.

إذن  $P_3 = P(X=2) = \frac{1}{10}$

ومنه قانون احتمال  $X$  هو كما في الجدول المجاور:

$x$	0	1	2
$P_i$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$

(ج)  $E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3$

$$= 0 \times \frac{3}{10} + 1 \times \frac{6}{10} + 2 \times \frac{1}{10} = \frac{8}{10}$$

$$V(X) = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + x_3^2 p_3 - E^2(X) = 0 + \frac{6}{10} + 4 \times \frac{1}{10} - \frac{64}{100}$$

$$= \frac{60 + 40 - 64}{100} = \frac{36}{100} = 0,36$$

$$\sigma(X) = \sqrt{0,36} = 0,6$$

## 2 - الاحتمالات الشرطية

### مثال -

كيس يحتوي على 5 كرات، ثلاث منها سوداء و 2 حمراء. نسحب عشوائيا كرتين على التوالي بدون إرجاع.

(أ) اعد كل الخارج الممكنة ارسم شجرة الإمكانات ولتكن  $A$ .

(ب) ما هو احتمال الحادثة " نتحصل على كرة سوداء ثم سوداء أي  $N-N$ "

(ج) احسب احتمال الحوادث التالية  $R-R$ ،  $R-N$ ،  $N-R$ .

(2) على تفرعات الشجرة  $B$  في المستوى الأول كتبنا احتمالات سحب كرة حمراء ( $R$ ) وكرة سوداء ( $N$ ) في السحب الأول.

في المستوى الثاني كتبنا احتمالات سحب كرة حمراء ( $R$ ) أو كرة سوداء ( $N$ ) في السحب الثاني وهذا يأخذ بعين الاعتبار

الاختيار الأول (الإمكانية الأولى)

وهذه الاحتمالات شرطية.

(أ) أعط معنى للعدد  $\frac{3}{5}$  في المستوى الأول.

ثم  $\frac{2}{4}$  في المستوى الثاني.

(ب) اكمل الشجرة ( $B$ ) بالاحتمالات للتبعية.

(3) في السؤال الأول وجدنا  $P(N-N) = \frac{6}{20}$  وهو جيد احتمال الحصول على كرة سوداء في السحب الأول واحتمال الحصول على كرة سوداء في السحب الثاني علما

أننا سحبنا كرة سوداء في السحب الأول.

- تحقق أنه تطبق نفس العملية بالنسبة للحوادث الثلاثة التالية:

$$R-R, R-N, N-R$$

✓ الحل

(أ) في السحب الأول لدينا 3 إمكانات لظهور  $N$  وإمكانيتين لظهور  $R$



$$P(A) \times P_4(B) = P(A \cap B) \text{ أي } \frac{6}{20} = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4}$$

$$P(N-R) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{20} \quad (3)$$

$$P(R-N) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{20}$$

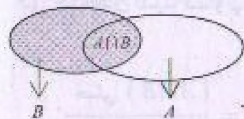
$$P(R-R) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{20}$$

## ◆ تعريف

نعتبر المجموعة  $\Omega$  المعرف عليها الاحتمال  $P$  وليكن  $A$  و  $B$  حادثين من  $\Omega$  حيث  $P(A) \neq 0$ .  
احتمال وقوع الحادث  $B$  علما ان الحادث  $A$  قد وقع هو العدد الذي نرمز له بـ  $P_A(B)$  والمعرف بـ:

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

نسمي هذا النوع من الاحتمال بالشرطي وله جميع خواص الاحتمال.



## ◆ ملاحظة

- (1) الاحتمال  $P_A(B)$  يرمز له كذلك بـ  $P(B|A)$
- (2)  $\Omega$  مجموعة الإمكانات و  $A$  و  $B$  حادثان غير خاليين.  
لا يتحقق  $A$  فإن الخارج التي تحقق  $B$  هي الخارج المتوافقة في  $A \cap B$ .  
وبالتالي عدد الحالات اللاتمة لتحقيق  $B$  علما ان  $A$  قد تحقق  
فهي إذن عدد عناصر  $A \cap B$  والتي نرمز لها بـ أصلي  $(A \cap B)$   
وبما ان  $A$  محقق فإن مخارج  $A$  تلعب دور الحالات الممكنة لـ  $B$  وليكن أصلي  $A$  هو  
عددتها بافتراض تساوي الاحتمال نتحصل على:

$$P_A(B) = \frac{\text{أصلي } (A \cap B)}{\text{أصلي } (A)} = \frac{\Omega \text{ أصلي}}{\text{أصلي } (A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

## ◆ خواص

(1) من أجل كل حادث  $B$  لدينا  $1 \geq P_A(B) \geq 0$

$$P_A(B) + P_A(\bar{B}) = 1 \quad (2)$$

(3) في حالة تساوي الاحتمال:

$$P_A(B) = \frac{\text{عدد للخارج للاتمة لـ } A \cap B}{\text{عدد للخارج للاتمة لـ } A}$$

(4)  $P(A \cap B)$  يحسب بطريقتين:

$$P(B) \times P(A) \neq 0 \text{ مع } P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)$$

إذن لدينا 5 فروع للسحب الأول  
كل فرع من الشجرة في السحب الأول يتفرع  
إلى أربعة فروع لأن في السحب الثاني لدينا 4  
كرات فقط.

إذن عدد الحالات الممكنة لسحب كرتين على  
التوالي بدون إرجاع الكرة إلى الكيس هي  
 $5 \times 4 = 20$

الحوادث المحصل عليها متساوية الاحتمال.  
(ب) عدد عناصر الحادث "  $N-N$  " هو 6

$$\text{ومنه } P(N-N) = \frac{6}{20}$$

(ج) عدد عناصر الحادث "  $N-R$  " هو 6 ومنه  $P(N-R) = \frac{6}{20}$

- عدد عناصر الحادث "  $R-N$  " هو 6 ومنه  $P(R-N) = \frac{6}{20}$

- عدد عناصر الحادث "  $R-R$  " هو 2 ومنه  $P(R-R) = \frac{2}{20}$

(2) (أ) - العدد  $\frac{3}{5}$  هو احتمال الحصول على كرة سوداء في السحب الأول ونرمز لهذا الحادث بـ  $A$

$$\text{إذن } P(A) = \frac{3}{5}$$

- العدد  $\frac{2}{4}$  هو احتمال الحصول على كرة سوداء في السحب الثاني علما أننا نتحصلنا على كرة  
سوداء في السحب الأول.

إذا رمزنا بـ  $B$  إلى الحادث " الحصول على كرة سوداء في السحب الثاني "  
نسمي  $P_A(B)$  احتمال الحصول على كرة سوداء في السحب الثاني علما أننا نتحصلنا على

كرة سوداء في السحب الأول وعليه  $P_A(B) = \frac{2}{4}$

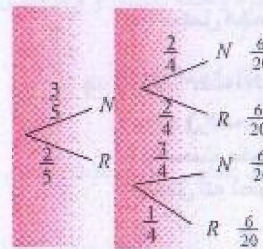
- العدد  $\frac{6}{20}$  هو احتمال الحصول على كرة سوداء في السحب الأول وكرة سوداء في السحب

الثاني أي احتمال الحادث  $(A \cap B)$

$$\text{إذن } P(A \cap B) = \frac{6}{20}$$

(ب) لاحظ أن مجموع الاحتمالات للدونة على التفرعات  
النابعة من نفس العقدة يساوي 1

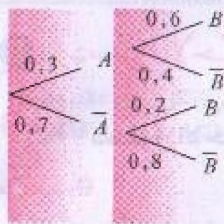
$$\left. \begin{array}{l} \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} \end{array} \right\} \frac{3}{5} + \frac{2}{5} = 1 \quad \left. \begin{array}{l} \frac{2}{4} \\ \frac{1}{4} \end{array} \right\} \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = 1 \quad \text{(قانون العقد)}$$



- الاحتمال الموجود في نهاية المسلك هو جداء الأعداد المكتوبة على الفروع المشكلة لهذا المسلك

$$\text{فمثلا } P(A) = \frac{3}{5} \quad P_A(B) = \frac{2}{4} \quad P(A \cap B) = \frac{6}{20}$$



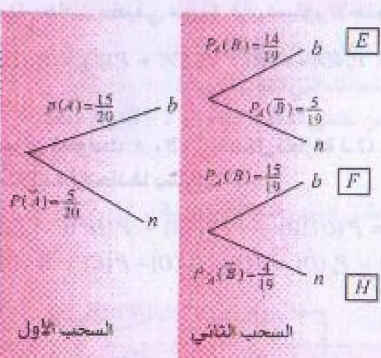


لإتمام الشجرة نستعمل الدستور  
 $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$  إذن  $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 0.7$   
 وباستعمال قانون العقد نجد  $P_A(\bar{B}) = 0.8$  و  $P_A(B) = 0.4$   
 $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0.3 \times 0.6 = 0.18$  (2)  
 $P(A \cap \bar{B}) = P(A) \times P_A(\bar{B}) = 0.3 \times 0.4 = 0.12$   
 $P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B) = 0.7 \times 0.2 = 0.14$

تمرين تدريبي 2

كيس يحتوي على 20 كرة منها 15 بيضاء (b) و 5 سوداء (n)، ن سحب على التوالي كرتين بدون إرجاع الكرة الأولى إلى الكيس.  
 احسب احتمال الحوادث التالية:  
 E "الكرتين بيضاويتين"  
 F "الكرة الأولى سوداء والكرة الثانية بيضاء"  
 G "الحصول على اللونين"  
 H "الكرتين سوداويتين"

الحل



ليكن A الحادث "الكرة الأولى بيضاء" و B الحادث "الكرة الثانية بيضاء".  
 - الحادث E هو  $A \cap B$   
 إذن  $P(E) = P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = \frac{15}{20} \times \frac{14}{19} = \frac{42}{76}$   
 - الحادث F هو  $\bar{A} \cap B$   
 إذن  $P(F) = P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B) = \frac{5}{20} \times \frac{15}{19} = \frac{15}{76}$   
 - الحادث G هو  $(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$   
 لكن  $\bar{A} \cap B = F$   
 إذن  $P(G) = P(F) + P(A \cap B)$   
 لأن الحادثين F و  $A \cap B$  غير متلائمين.  
 $P(G) = \frac{15}{76} + P(A) \times P_A(B) = \frac{15}{76} + \frac{15}{20} \times \frac{14}{19} = \frac{15}{76} + \frac{15}{76} = \frac{30}{76}$   
 - الحادث H هو  $\bar{A} \cap \bar{B}$   
 إذن  $P(H) = P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(\bar{B}) = \frac{5}{20} \times \frac{4}{19} = \frac{1}{19}$

الإنثبات

(1)  $A \cap B$  هي مجموعة جزئية من A إذن  $0 \leq P(A \cap B) \leq P(A)$   
 ومنه  $0 \leq P_A(B) \leq 1$  أي  $0 \leq \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \leq 1$   
 (2)  $P_A(B) + P_A(\bar{B}) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} + \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(A)} = \frac{P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})}{P(A)}$   
 لكن  $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = A$   
 إذن  $P((A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = P(A)$   
 وبالتالي  $P_A(B) + P_A(\bar{B}) = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$   
 (3) إذا كان لدينا تساوي الاحتمال فإن:

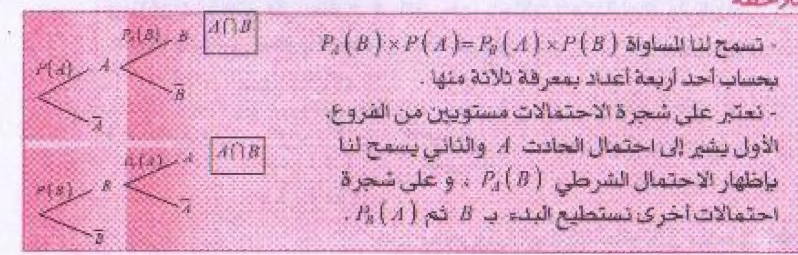
$$\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\Omega \text{ اصلي}}{(A) \text{ اصلي}} = \frac{(A \cap B) \text{ اصلي}}{A \text{ اصلي}}$$

$$(1) \dots\dots\dots P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$(2) \dots\dots\dots P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

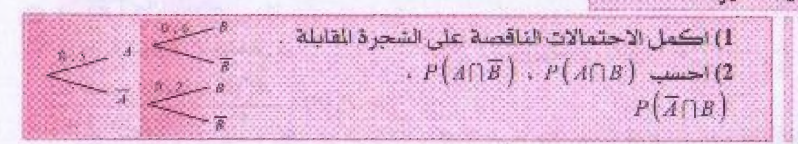
من (1) و (2) نتحصل على  $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A) = P_B(A) \times P(B)$

ملاحظة



- تسمح لنا المساواة  $P_A(B) \times P(A) = P_B(A) \times P(B)$  بحساب أحد أربعة أعداد بمعرفة ثلاثة منها.  
 - نعتبر على شجرة الاحتمالات مستويين من الفروع.  
 الأول يشير إلى احتمال الحادث A والثاني يسمح لنا بإظهار الاحتمال الشرطي  $P_A(B)$  و على شجرة احتمالات أخرى نستطيع البدء بـ B ثم  $P_B(A)$ .

تمرين تدريبي 1



(1) اكمل الاحتمالات الناقصة على الشجرة المقابلة  
 (2) احسب  $P(A \cap \bar{B})$ ،  $P(A \cap B)$ ،  $P(\bar{A} \cap B)$

الحل

(1) من الشجرة نجد  $P(A) = 0.3$  و  $P_B(B) = 0.6$



### 3 - دستور الاحتمالات الكلية - شجرة الاحتمالات

#### 1 - 3 دستور الاحتمالات الكلية

##### مبرهنة 1

$A$  حادث و  $\bar{A}$  حادثه العكسي و  $D$  حادث كفيي إذن :

$$P(D) = P(A) \times P_A(D) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(D)$$

##### الاثبات

$D$  هو اتحاد الحادثين الغير متلائمين  $D \cap A$  و  $D \cap \bar{A}$

$$D = (D \cap A) \cup (D \cap \bar{A})$$

$$P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap \bar{A})$$

$$= P(A) \times P_A(D) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(D)$$

تسمى العلاقة  $P(D) = P(A) \times P_A(D) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(D)$  بدستور الاحتمالات الكلية.

##### مبرهنة 2 (تعميم)

إذا كانت  $A, B, C$  ثلاثة حوادث تشكل تجزئة لمجموعة الإمكانات  $\Omega$  (حوادث غير متلائمة) و  $D$  حادث كفيي من  $\Omega$  فإن دستور الاحتمالات الكلية هو :

$$P(D) = P(A) \times P_A(D) + P(B) \times P_B(D) + P(C) \times P_C(D)$$

##### الاثبات

بما أن الحوادث  $A, B, C$  تشكل تجزئة لـ  $\Omega$  فإن الحوادث  $D \cap A$  و  $D \cap B$  و  $D \cap C$  غير متلائمة وإتحادها يساوي  $D$

$$D = (D \cap A) \cup (D \cap B) \cup (D \cap C)$$

$$P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap B) + P(D \cap C)$$

$$= P(A) \times P_A(D) + P(B) \times P_B(D) + P(C) \times P_C(D)$$

##### ملاحظة

نستطيع تعميم المبرهنة (2) إلى أكثر من ثلاثة حوادث بحيث أنها تشكل تجزئة للمجموعة  $\Omega$ .

إذا كانت الحوادث  $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$  تشكل تجزئة لـ  $\Omega$  (أحداث غير متلائمة متني) فإنه من أجل كل حادث كفيي  $A$  لدينا :

$$P(A) = P(A \cap C_1) + P(A \cap C_2) + \dots + P(A \cap C_n)$$

$$P(A \cap C_i) = P(C_i) \times P_{C_i}(A) \text{ لدينا } i \text{ لكل}$$

$$\text{فإن } P(A) = P(C_1) \times P_{C_1}(A) + P(C_2) \times P_{C_2}(A) + \dots + P(C_n) \times P_{C_n}(A)$$

### 3 - 2 شجرة الاحتمالات

كل تجربة عشوائية نستطيع وصفها بواسطة شجرة الاحتمالات التي تتكون من عقد وفروع نابعة من هذه العقد. وكل عقدة من هذه الشجرة توافق حالة لهذه التجربة وانطلاقاً من كل حالة من هذه الحالات نعرف قيمة احتمال الحالة للولاية لها.

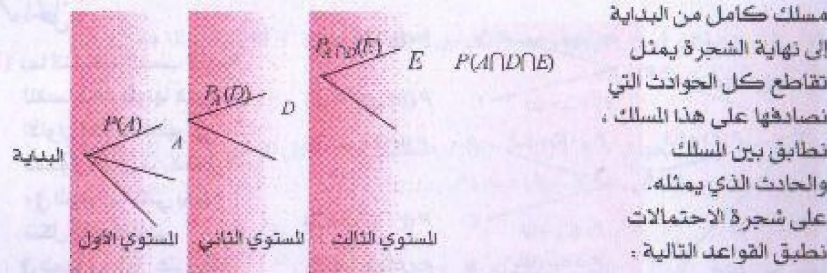
على الفرع النابع من البداية  $A$  نكتب  $P(A)$

وعلى الفرع  $AD$  النابع من  $A$  نكتب  $P_A(D)$

وعلى الفرع  $DE$  النابع من  $D$  نكتب  $P_{A \cap D}(E)$  وفي نهاية

كل مسلك نكتب احتمال تقاطع الحوادث المكتوبة على الفروع المشكلة لهذا المسلك :

$$P(A \cap D \cap E) \text{ وبهذه الكيفية نكمل إنشاء الشجرة.}$$



- احتمال مسلك هو جداء الاحتمالات المكتوبة على كل فرع من هذا المسلك.

- احتمال حادث كفيي  $E$  هو مجموع احتمالات المسالك التي تقودنا إلى  $E$ .

- مجموع الاحتمالات المكتوبة على الفروع النابعة من نفس العقدة يساوي 1 (قانون العقد).

##### مثال -

$A, B, C$  ثلاثة حوادث غير متلائمة متني مشكلة تجزئة لـ  $\Omega$

و  $D$  حادث كفيي من  $\Omega$

مجموع الاحتمالات المدونة على الفروع

النابعة من نفس العقدة يساوي 1

وعليه  $P(A) + P(B) + P(C)$

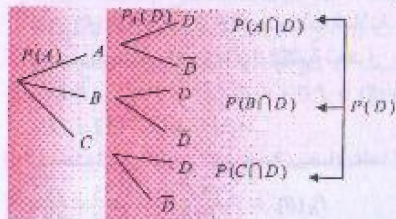
- احتمال الحادث الذي يوافق المسلك

$$P(A \cap D) = P(A) \times P_A(D)$$

هو احتمال الحادث  $D$  هو مجموع

احتمالات المسالك التي تقودنا إلى  $D$  وعليه :

$$P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) + P(C \cap D)$$



احتمالات المسالك التي تقودنا إلى  $D$  وعليه :

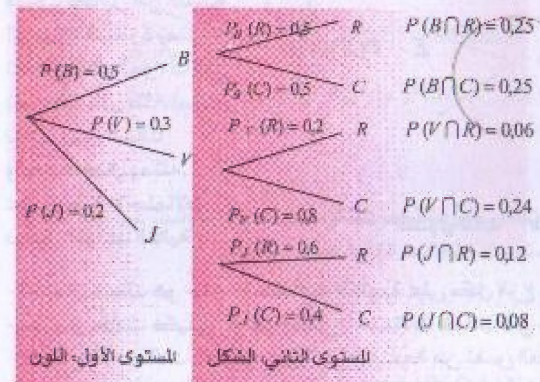
$$P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) + P(C \cap D)$$



تمرين تدريبي 1

كيس يحتوي على قصاصات بثلاثة ألوان، نصفها أبيض (B) و  $\frac{3}{10}$  منها أخضر (V) وخمسها أصفر (J)، ولتكن 50% من القصاصات البيضاء دائرية الشكل (R)، 20% من القصاصات الخضراء دائرية الشكل و 60% من الصفراء دائرية الشكل كذلك، أما البقية فهي مربعة الشكل (C).  
نسحب عشوائيا قصاصة من الكيس.  
(1) مثل بواسطة شجرة الاحتمالات كل الاحتمالات التي تصادفها على الشجرة.  
(2) ما هو احتمال أن تكون القصاصات دائرية الشكل ؟  
(3) إذا علمت أنها دائرية الشكل فما هو احتمال أن تكون بيضاء؟ خضراء؟ صفراء؟

الحل ✓



(1) بما أننا نعلم النسب الثبوتية للقصاصات بلونها فإن الألوان الثلاثة تظهر في المستوى الأول من الشجرة. وفي المستوى الثاني يظهر شكل القصاصات.  
في المستوى الأول على كل فرع نكتب النسب الثبوتية التي نترجم احتمال سحب كل لون وفي المستوى الثاني نظهر الاحتمالات الشرطية للعطاء

بنسب القصاصات الدائرية أو المربعة لكل لون وعليه إذا رمزنا ب R إلى الحادث "سحب قصاصة دائرية"، فإننا نكتب  $P_B(R) = 0.5$  على الفرع BR.

(2) لدينا:  $R = (R \cap B) \cup (R \cap V) \cup (R \cap J)$   
الحوادث  $R \cap B$  و  $R \cap V$  و  $R \cap J$  غير متلائمة إذن  $P(R)$  هو مجموع الاحتمالات الثلاثة.  
وحسب دستور الاحتمالات الكلية نجد:

$$P(R) = P(B) \times P_B(R) + P(V) \times P_V(R) + P(J) \times P_J(R) = 0.25 + 0.06 + 0.12 = 0.43$$

(3) - احتمال أن تكون القصاصات بيضاء علما أنها دائرية هو  $P_B(B)$  حيث:

$$P_B(B) = \frac{P(R \cap B)}{P(R)} = \frac{0.25}{0.43} = \frac{25}{43}$$

- احتمال أن تكون القصاصات خضراء علما أنها دائرية هو  $P_R(V)$  حيث:

$$P_R(V) = \frac{P(R \cap V)}{P(R)} = \frac{0.06}{0.43} = \frac{6}{43}$$

- احتمال أن تكون القصاصات صفراء علما أنها دائرية هو  $P_R(J)$  حيث:

$$P_R(J) = \frac{P(R \cap J)}{P(R)} = \frac{0.12}{0.43} = \frac{12}{43}$$

بطريقة أخرى نجد:

$$P_R(J) = 1 - (P_R(B) + P_R(V)) = 1 - (\frac{25}{43} + \frac{6}{43}) = 1 - \frac{31}{43} = \frac{12}{43}$$

4 - الاستقلالية في الاحتمالات

4 - 1 الأحداث المستقلة

تعريف

نقول عن حادثين A و B انهما مستقلان من اجل الاحتمال P إذا وفقط إذا كان

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

خاصية

الحادثان A و B بحيث  $P(B) \times P(A) \neq 0$  مستقلان من اجل الاحتمال P إذا وفقط إذا كان

$$P(A) = P_B(A) \text{ أو } P(B) = P_A(B)$$

الإنبات

لدينا من جهة  $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$  ومن جهة أخرى:

$$P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A) \text{ و } P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

إذن نستنتج  $P(A) \times P(B) = P(B) \times P_B(A)$  و  $P(A) \times P(B) = P(A) \times P_A(B)$

$$\text{ومنه ينتج } P(A) = P_B(A) \text{ و } P(B) = P_A(B)$$

ملاحظة

- (1) كل حادثين غير خائينين وغير متلائمين فإنهما غير مستقلين.
- (2) - لتساواة  $P(A) = P_B(A)$  تعني أن تحقق الحادث A غير مرتبط بتحقيق الحادث B - لتساواة  $P(B) = P_A(B)$  تعني أن تحقق الحادث B غير مرتبط بتحقيق الحادث A
- (3) رأينا في إنشاء شجرة الإمكانيات والاحتمالات أنه من أجل فرع نابع عن عقدة غير ابتدائية مثلا C ..... B نكتبنا  $P_B(C)$  حيث هو الحادث الناتج من تقاطع كل الحوادث الموجودة على هذا المسلك من البداية إلى B. وفي حالة الاستقلالية يكفي أن نكتب  $P(C)$ .

4 - 2 التجارب العشوائية المستقلة

تعريف

لتكن  $E_1$  و  $E_2$  تجربتين عشوائيتين، مجموعتي مخارجهما  $\Omega_1$  و  $\Omega_2$  على الترتيب. نقول عن  $E_1$  و  $E_2$  انهما مستقلتين إذا كان كل حادث من مستقل عن كل حادث من  $E_2$ .



خاصية

$E$  تجربة عشوائية تتضمن عدد منته من الاختبارات و  $S$  حادث مرتبط بالتجربة  $E$ .  
إذا كررنا  $n$  مرة هذه التجربة  $E$  بنفس الطريقة و في نفس الشروط و إذا كانت التجارب  
 $E_1, E_2, \dots, E_n$  مستقلة فإن احتمال الحادث  $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap \dots \cap S_n$  يساوي  
$$\frac{P(S) \times P(S) \times \dots \times P(S)}{n \text{ مرة}}$$
 أي  $(P(S))^n$

مثال - 1

$E$  هي التجربة « رمي حجر النرد » و  $S$  الحادث « الحصول على رقم فردي »  
إذن  $P(S) = \frac{3}{6} = 0.5$   
احتمال الحصول 4 مرات على عدد فردي في الرميات الأربعة المتتالية لنفس الحجر  
يساوي  $(P(S))^4$  أي  $(0.5)^4$

مثال - 2

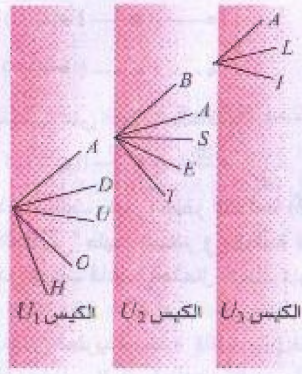
$U_1$  كيس يحتوي على حروف كلمة HOUDA و  $U_2$  كيس آخر يحتوي على  
كلمة BASET و  $U_3$  كيس ثالث حروفه ALI.  
نسحب عشوائيا حرفا من  $U_1$  ثم حرفا من  $U_2$  ثم حرفا من  $U_3$  وتسجل الحروف  
المحصل عليها حسب ترتيب السحب. تقبل أن اختيار حرف من كيس مستقل عن  
كل الاختيارات التي سبقت.  
احسب احتمال الحادث « نتحصل على ABA ».

الحل

نبدا بإنشاء الشجرة الموافقة لهذه التجربة ،  
الفرع A — مثلا هو الحادث « سحب الحرف A من  $U_1$  »  
ابتداء من العقدة A هناك خمسة مخارج ممكنة ، نفس الشيء بالنسبة إلى العقد D, U, O, H  
ابتداء من الحرف B هناك ثلاثة مخارج ممكنة والتي تمثل الحروف الموجودة في الكيس  $U_3$ .  
نفس الشيء بالنسبة إلى الحروف T, E, S, A.  
على الفرع B — A نسجل احتمال الحادث « سحب B من  $U_2$  علما أننا سحبنا A من  $U_1$  »  
لكن حسب الفرض هذا الحادث مستقل عن A.  
إذن احتمال هو احتمال الحادث « سحب B من  $U_2$  » والذي يساوي  $\frac{1}{5}$ .  
هذا الطرح يبقى صحيحا بالنسبة إلى كل الفروع الأخرى .  
لحساب احتمال الحادث « ABA » ليس من الضروري إنشاء ككل الشجرة.  
الحادث « ABA » نتحصل عليه بالسلك الوحيد :  
$$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{75} \quad P(A \cap B \cap A)$$

إذن حسب قاعدة حساب احتمال مسلك

$$P(ABA) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{75}$$



نستطيع اعتبار هذه التجربة بمثابة تتالي ثلاث تجارب ،  
الأولى سحب حرف من  $U_1$   
والثانية سحب حرف من  $U_2$   
والثالثة سحب حرف من  $U_3$ .  
لقد فرضنا أن هذه التجارب مستقلة أي أن مخارج كل  
منها غير مرتبطة بكل السحابات التي سبقتها.  
المخرج  $(e_1, e_2, e_3)$  في التجربة الكلية هو قائمة  
مكونة من مخارج التجارب المستقلة.  
في هذه الشروط يكون لدينا  
$$P(e_1, e_2, e_3) = P_1(e_1) \times P_2(e_2) \times P_3(e_3)$$
  
حيث  $P_i$  يرمز إلى قانون احتمال التجربة ذات الرتبة  $i$

ملاحظة

نعلم أن دراسة تجربة عشوائية أنجزت فعليا تسري وفق نموذج نظري أنشئ مسبقا.  
الاستقلالية بين بعض الحوادث هو فرض نموذج نابع من تحليل التجربة.  
التجربة أعطت أن هذا الفرض يكون جليا في بعض التجارب النرجعية مثل :  
- رمي عدة أحجار نرد أو قطعة نقدية.  
- سحب بدون شرط من أكياس مختلفة.  
- الرمي التوالي لنفس القطعة النقدية.  
- سحب بالإرجاع من نفس الكيس.  
- رمي حجر النرد  $n$  مرة متتالية.

تمرين تدريبي

لنكن  $a, b, c$  ثلاث قطع نقدية، القطعة  $a$  مترزة والأخرتين متشابهتين  
ومزيفتين نرسم بالصفير إذا ظهر الظهر  $P$  وبالأحد إذا ظهر الوجه  $(F)$ .  
بالنسبة إلى القطعة  $a$  لدينا  $P(0) = P(1) = 0.5$ .  
بالنسبة إلى القطعتين الأخرتين لدينا  $P(0) = 0.7$  و  $P(1) = 0.3$   
نرمي القطع الثلاثة العطاء وناخذ كمخرج الثلاثيات  $(e, f, g)$  حيث  $e, f, g$   
تمثل على التوالي الأوجه الظاهرة للقطع  $a, b, c$ .  
تقبل أن نتيجة كل قطعة مستقلة عن نتائج القطعتين الأخرتين.  
ما هو احتمال الحادث " التحصل مرتين فقط على الظهر  $P$  " ؟

الحل

نبدا بإنشاء شجرة الاحتمالات.  
يظهر جليا أن ثلاثة مسالك فقط التي تحقق الحادث " التحصل مرتين فقط على الظهر  $P$  " و هي :



## 5 - استقلالية متغيرين عشوائيين

- قانون احتمال لمتغيرين عشوائيين :  
 $X$  و  $Y$  متغيران عشوائيان معرفان على مجموعة إمكانيات لتجربة عشوائية حيث :  
 $X$  يأخذ القيم  $x_1, x_2, \dots, x_n$  و  $Y$  يأخذ القيم  $y_1, y_2, \dots, y_n$   
 تعريف قانون الثنائية  $(X, Y)$  هو إعطاء الاحتمال  $P_{(i,j)}$  لكل حادث  $[(Y=y_j) \text{ و } (X=x_i)]$   
 حيث  $n \geq i \geq 0$  و  $n \geq j \geq 0$ .  
 وبشكل عام يعطى قانون  $(X, Y)$  في جدول.

- استقلالية  $X$  و  $Y$  :  
 القول أن  $X$  و  $Y$  مستقلان يعني أنه من أجل كل عددين طبيعيين  $i$  و  $j$   
 يكون الحادثان  $(X=x_i)$  و  $(Y=y_j)$  مستقلين.

### ملاحظة

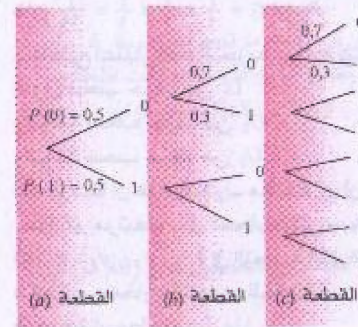
- (1) إذا كان  $(X=x_i)$  و  $(Y=y_j)$  مستقلان فإن :  
 $P[(X=x_i) \cap (Y=y_j)] = P(X=x_i) \times P(Y=y_j)$   
 وبالتالي  $P_{(i,j)} = P_i \times P_j$  من أجل كل طبيعيين  $i$  و  $j$ .
- (2) الجداء  $P_i \times P_j \neq 0$  مهما كان  $i$  و  $j$   
 وعليه إذا كان  $P_{(i,j)} = 0$  من أجل ثنائية معينة فإنه لا توجد استقلالية.
- (3) إذا كان  $Z$  متغير عشوائي بحيث  $Z = X + Y$   
 فإنه مهما كان  $X$  و  $Y$  مستقلين أم لا يكون لدينا :  
 $E(Z) = E(X) + E(Y)$   
 لكن إذا كان  $X$  و  $Y$  غير مستقلين فإن  $V(Z) \neq V(X) + V(Y)$

### تمرين تدريبي

- تجربة عشوائية تتمثل في رمي حجرى نرد متزدين : و ليكن  $X$  المتغير العشوائي قيمته تمثل مجموع الرقمين الظاهرين على الوجه العلوي و  $Y$  متغير عشوائي قيمه عبارة عن جداء الرقمين الظاهرين على الوجه العلوي.
- احسب  $P(Y=5)$  ،  $P(X=4)$   
 ثم  $P([(X=4) \cap (Y=5)])$   
 هل  $X$  و  $Y$  مستقلان ؟

### الحل

$$P(X=4) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{3}{36} \quad (1)$$



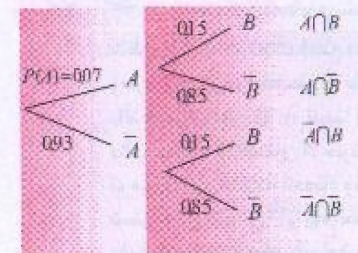
لأن الحادث ظهور الصفر للقطعة (b) مستقل عن الحادث "ظهور الصفر في القطعة a" إذن حسب قاعدة احتمال مسلك فإن :  
 $P(0,0,1) = 0,5 \times 0,7 \times 0,7 = 0,245$

بنفس الطريقة نجد :  $P(0,1,0) = 0,5 \times 0,3 \times 0,7 = 0,105$  و  $P(1,0,0) = 0,5 \times 0,7 \times 0,7 = 0,245$   
 إذا رمزنا ب  $B$  إلى الحادث "الحصول على الظهر مرتين" فإن :  
 $P(B) = P(0,0,1) + P(0,1,0) + P(1,0,0)$   
 $= 0,245 + 0,105 + 0,245 = 0,595$

### تمرين تدريبي 2

- نعتبر سيارة من نوع كليو (CLIO 97) ليست في حالة جيدة ولنعتبر الحادثين :  
 $A$  «السيارة لها عطب في المحرك» و  $B$  «السيارة لها عطب في العجلة»  
 لدينا  $P(A)=0,07$  و  $P(B)=0,15$   
 (1) هل الحادثان  $A$  و  $B$  مستقلان ؟  
 (2) ما هو احتمال أن تكون السيارة قابلة للسير ؟

### الحل



- (1) من النص نفهم أن الحادثين  $A$  و  $B$  مستقلين لأن العطب في المحرك ليست له علاقة بالعطب في العجلة.
- (2) الحادث «السيارة قابلة للسير» هو  $\bar{A} \cap \bar{B}$  واحتماله هو جداء الاحتمالات الموجودة على المسلك  $\bar{A} \cap \bar{B}$   
 $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,93 \times 0,85 = 0,7905$  أي

### طريقة ثانية

الحادث «السيارة قابلة للسير» هو الحادث العكسي للحادث «السيارة لها أحد العطبين» أي الحادث العكسي للحادث  $A \cup B$ .  
 لكن  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$   
 إذن  $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B)$   
 $= 1 - P(A) - P(B) + P(A) \times P(B) = 0,7905$



# تطبيقاً نوذجة



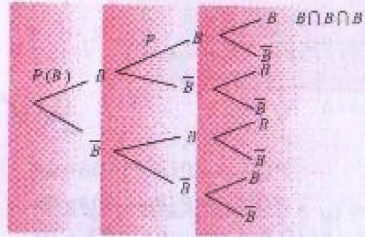
## حساب احتمال حادث

### 1 تطبيق

كيس يحتوي على 10 كرات منها 6 بيضاء، تسحب 3 من هذا الكيس.  
(الخرج هو عبارة عن مجموعة من ثلاث كرات).  
احسب احتمال الحصول على ثلاث كرات بيضاء.

### الحل

نسمي  $B$  الحادث « سحب كرة بيضاء » و  $\bar{B}$  حادثه العكسي  
يمكن اعتبار هذا السحب كتعاقب ثلاث سحب متتالية لكرة من الكيس بدون إرجاع  
وللحصول على ثلاث كرات بيضاء



يجب اتباع المسلك  $B \rightarrow B \rightarrow B$   
هناك مسلك واحد يحقق هذا السحب  
(ثلاث كرات بيضاء)  
وحسب قاعدة احتمال مسلك نجد :  
 $P(B \cap B \cap B) = \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{1}{6}$

## التعرف على استقلالية حادثين

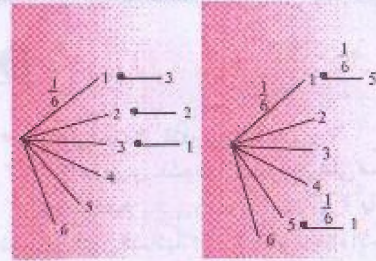
### 2 تطبيق

قسم يتكون من 40 تلميذا منهم 25 بنتا و 15 ذكرا.  
15 بنتا تدرس الفرنسية و 5 ذكور يدرسون الفرنسية. نختار عشوائيا تلميذا  
واحدا من القسم ونعتبر الحادثين  $A$  و  $B$  المعرفين كما يلي :  
 $A$  « التلميذ يكون بنتا »  
 $B$  « التلميذ يدرس الفرنسية »  
احسب  $P(A)$  و  $P(B)$   
ب) هل الحادثان  $A$  و  $B$  مستقلان ؟

### الحل

احتمال الحادث  $A$  هو النسبة التي تمثل عدد البنات على عدد عناصر القسم وتساوي  $\frac{25}{40}$

$$P(A) = \frac{25}{40} = \frac{5}{8} \quad \text{إذن}$$



$$P(Y=5) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{2}{36}$$

الحادث  $(X=4) \cap (Y=5)$  لا يتحقق أبدا  
إذن فاحتماله هو الصفر  
لكن  $P(X=4) \times P(Y=5) = 6 \times (36)^{-2}$   
إذن فهذان المتغيران غير مستقلين أي مرتبطين.



- A « العدد لشكل رقم عشريته و أحاده متساوي »  
 B « رقم المئات هو 5 »  
 C « العدد المتحصل عليه هو مربع لعدد طبيعي »  
 D « العدد المتحصل عليه أكبر تماماً من 324 »  
 E « العدد المتحصل عليه أرقامه مختلفة مثنى مثنى »

✓ الحل

- (1) نستعمل طريقة ملء الخانات لتعيين عدد الأعداد التي يمكن تشكيلها.  
 نملأ كل من الثلاث خانات  $V, B, R$  بحيث:  
 الخانة  $R$  لها 6 مخارج والخانة  $B$  لها 6 مخارج و  $V$  لها 6 مخارج أيضاً.

6 اختيارات	6 اختيارات	6 اختيارات
الخانة $R$	الخانة $B$	الخانة $V$

إذن هناك  $6 \times 6 \times 6$  عدداً يمكن تشكيله من هذه الرمية.

- (2) لتعيين عدد الحالات الملائمة لتحقيق الحادث  $A$  نستعمل ملء الخانات الثلاث  $R, B, V$ .  
 الخانة  $R$  لها 6 اختيارات والخانة  $B$  لها 6 اختيارات و  $V$  لها اختيار واحد  
 وبالتالي عدد الحالات الملائمة لتحقيق  $A$  هي  $6 \times 6 \times 1$  أي 36

$$P(A) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}} = \frac{36}{6 \times 6 \times 6} = \frac{1}{6}$$

الخانة  $R$  لها اختيار واحد وهو الرقم 5 والخانة  $B$  لها 6 اختيارات والخانة  $V$  لها 6 اختيارات وبالتالي عدد الحالات الملائمة لتحقيق الحادث  $B$  هي  $1 \times 6 \times 6 = 36$

$$P(B) = \frac{36}{6 \times 6 \times 6} = \frac{1}{6}$$

نفرض أن العدد المشكل هو  $rbv$

$rbv = a^2$  مربع لعدد طبيعي يعني  $rbv = a^2$

$rbv = a^2$  يكافئ  $a = \sqrt{rbv}$  لكن العدد  $rbv$  محصور بين 111 و 666

وعليه  $a \in \{11, 12, \dots, 25\}$

من أجل الأعداد  $a$  التي رقم أحادها 3 أو 7 نتحصل على أعداد  $rbv$  أحد أرقامها أكبر من 6 وبالتالي فهي مرفوضة.

لأن عدد القيم الممكنة لـ  $a$  هي 12 وكل قيمة لـ  $a$  يقابلها عدد  $rbv$   
 وبالتالي عدد الأعداد  $rbv$  التي هي مربع لعدد طبيعي هو 12.

$$P(C) = \frac{12}{6 \times 6 \times 6} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

حتى يكون العدد المتحصل عليه أكبر من 324 يجب أن نختار رقم المئات من المجموعة  $\{3, 4, 5, 6\}$  ورقم العشرات من  $\{2, 3, 4, 5, 6\}$  ورقم الوحدات من  $\{6, 5\}$

إذن عدد الحالات الممكنة هو  $4 \times 5 \times 2 = 40$

احتمال الحادث  $B$  هو النسبة التي تمثل عدد التلاميذ الذين يدرسون الفرنسية على عدد.

$$\text{عناصر القسم وتساوي } \frac{20}{40}$$

$$P(B) = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$$

الحادث « التلميذ ينت تدرس الفرنسية » واحتماله هو النسبة التي تمثل عدد

$$\text{البنات اللاتي يدرسن الفرنسية على عدد عناصر القسم وتساوي } \frac{15}{40}$$

$$P(A \cap B) = \frac{15}{40} = \frac{3}{8}$$

بما أن  $P(A) \times P(B) = \frac{5}{16}$  و  $P(A \cap B) = \frac{3}{8}$  فإن  $A$  و  $B$  حادثان غير مستقلين.

(ب) حتى يكون الحادثان  $A$  و  $B$  مستقلين يجب أن يكون  $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

### تطبيق 3 حساب احتمال حوادث

$A$  و  $B$  حادثان بحيث  $P(A) = 0.6$  ،  $P(B) = 0.4$  ،  $P(A \cap B) = 0.2$   
 احسب  $P(\bar{A} \cap \bar{B})$  ،  $P(\bar{A} \cap B)$  ،  $P(A \cap \bar{B})$  ،  $P(A \cup B)$  ،  $P(\bar{B})$  ،  $P(\bar{A})$

✓ الحل

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.6 = 0.4$$

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.4 = 0.6$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.6 + 0.4 - 0.2 = 0.8$$

الحادثان  $A \cap B$  و  $\bar{A} \cap \bar{B}$  غير متلائمين و  $B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$

ومنه  $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$  وعليه  $P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$

$$P(\bar{A} \cap B) = 0.4 - 0.2 = 0.2$$

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\bar{A}) + P(\bar{B}) - P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.4 + 0.6 - 0.2 = 0.8$$

$$P(\bar{A} \cup B) = P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap B) = 0.2 + 0.2 = 0.4$$

### تطبيق 4 حساب احتمال حوادث

نرمي ثلاثة أحجار نرد ألوانها أحمر ( $R$ ) و أبيض ( $B$ ) وأخضر ( $V$ )

نشكل عندئذ عدداً من ثلاثة أرقام ،

رقم المئات هو الرقم الظاهر على ( $R$ ) ورقم العشرات هو الرقم الظاهر على ( $B$ )

ورقم الوحدات هو الرقم الظاهر على ( $V$ )

(1) ما هو عدد الأعداد التي يمكن تشكيلها ؟

(2) احسب احتمال الأحداث التالية :



اختيارات 4	اختيارات 5	اختيارات 2
R	B	V

و بالتالي  $P(D) = \frac{40}{6 \times 6 \times 6} = \frac{5}{27}$

- حتى تكون أرقام العدد المتحصل عليه مختلفة مثنى مثنى يجب أن يكون لرقم الثبات 6 اختيارات و رقم العشرات 5 اختيارات و رقم الوحدات 4 اختيارات

وبالتالي عدد الحالات الملائمة هي  $6 \times 5 \times 4$  إذن  $P(E) = \frac{6 \times 5 \times 4}{6 \times 6 \times 6} = \frac{5}{9}$

### تطبيق 6

احتمال فتح باب خزانة مزود بنظام

باب خزانة بنك مزود بنظام الحماية مفتاحه مشكل من رقمين مختلفين مختارين من المجموعة  $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  وحرفين سواء كانا مختلفين أم نفس الحرف من المجموعة  $F = \{a, b, c\}$  ما هو احتمال أن شخصا يعلم هذا التكوين أن يفتح الباب للوهلة الأولى في كل حالة من الحالات التالية :

(أ) لا يعلم المفتاح . (ب) يعلم فقط أن الرقمين فرديين .  
(ج) يعلم فقط أن الحرفين غير متشابهين . (د) يعلم الحرفين بالضبط .

الحل

المفتاح يكون من الشكل  $xy$  حيث  $x, y$  عنصرين مختلفين من  $B$  و  $a, b$  حرفين مختلفين أم لا من  $F$ .

(أ) حادث « الشخص يفتح الباب للوهلة الأولى بدون علم المفتاح »

عدد الحالات الممكنة لتشكيل هذا المفتاح هي  $8 \times 7 \times 3 \times 3 = 336$

x	y	a	b
اختيارات 8	اختيارات 7	اختيارات 3	اختيارات 3

عدد الحالات الملائمة لتحقيق A هي 1 لأنه يوجد مفتاح واحد يفتح الخزانة

إذن  $P(A) = \frac{1}{336} = 0.0029$

x	y	a	b
اختيارات 3	اختيارات 2	اختيارات 3	اختيارات 3

B هو الحادث « الشخص يفتح الخزانة للوهلة الأولى علما أنه يعلم أن الرقمين فرديين »

عدد الحالات الممكنة لـ B هي  $3 \times 2 \times 3 \times 3 = 54$

وبالتالي  $P(B) = \frac{1}{54} = 0.018$

(ج) الحادث « الشخص يفتح الخزانة للوهلة الأولى علما أنه يعلم أن الحرفين غير متشابهين »

عدد الحالات الممكنة لـ C هي  $6 \times 5 \times 3 \times 2 = 180$

x	y	a	b
اختيارات 6	اختيارات 5	اختيارات 3	اختيارات 2

إذن  $P(C) = \frac{1}{6 \times 5 \times 6} = \frac{1}{180}$

(د) الحادث « الشخص يفتح الخزانة للوهلة الأولى علما أنه يعلم الحرفين بالضبط »

إذن يبقى له أن يختار الرقمين المختلفين من E.

وعدد الحالات الممكنة هي  $6 \times 5 = 30$

إذن  $P(D) = \frac{1}{30} = 0.033$

### تطبيق 6

توقع احتمال حادث

أربعة أصدقاء توجهوا إلى مبنى به أربع قاعات سينما كل واحد يختار عشوائيا قاعا وبإستقلالية عن الآخرين ، تهتم بتوزيعهم على هذه القاعات ونفرض أن كل التوزيعات متساوية الاحتمال .  
احسب احتمال الأحداث التالية :

A « كل واحد منهم موجود في قاعة »  
B « على الأقل اثنين موجودين في نفس القاعة »  
C « كلهم في نفس قاعة »

الحل

نرمز إلى الأشخاص بـ  $a, b, c, d$ .

لتعيين عدد الحالات الممكنة نتبع طريقة ملء الخانات حيث كل خانة تمثل شخص.

a	b	c	d
اختيارات 4	اختيارات 4	اختيارات 4	اختيارات 4

كل شخص له أربعة اختيارات .

إذن عدد الحالات الممكنة هي  $4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^4$

(أ) لكي يكون كل شخص في قاعة يجب أن يكون للشخص a أربع اختيارات و b له 3 اختيارات و c له اختيارات و d له اختيار واحد.

وبالتالي عدد الحالات الملائمة لتحقيق A هي  $4 \times 3 \times 2 \times 1$  أي 24.

إذن  $P(A) = \frac{24}{256} = 0.093$

(ب) على الأقل شخصين موجودين في نفس القاعة تعني أنه إما 2 أو 3 أو 4 موجودين في نفس القاعة

- إذا كان شخصين في نفس القاعة فإن الشخصين الآخرين كل منهما له 3 اختيارات



وبالتالي عدد الحالات الملائمة في هذه الحالة هي  $3 \times 3 = 9$

- إذا كان ثلاث أشخاص في نفس القاعة فإن الشخص الرابع له 3 اختيارات.

- إذا كان 4 أشخاص في نفس القاعة فإنه توجد حالة واحدة.

وعليه فإن عدد الحالات الملائمة الكلية هي  $9 + 3 + 1 = 13$

$$P(B) = \frac{13}{256} = 0,05 \quad \text{إذن}$$

(ج) عدد الحالات الملائمة للحادث  $C$  هي 4 ومنه  $P(C) = \frac{4}{256}$

### تطبيق 7

توقع احتمال سحب كريات ملونة وتحليل التركيب

كيس يحتوي على كرات بيضاء وحمراء وسوداء نسحب عشوائيا كرة من الكيس ونفرض أن كل السحبات متساوية الاحتمال.

$P_1 = \frac{1}{4}$  هو احتمال سحب كرة سوداء و  $P_2 = \frac{1}{3}$  هو احتمال سحب كرة حمراء.

(1) ما هو احتمال سحب كرة بيضاء ؟

(2) إذا علمت أنه توجد 48 كرة في الكيس عين التركيب الدقيقة له.

✓ الحل

(1) نرمز بـ  $P_3$  إلى احتمال سحب كرة بيضاء نعلم أن  $P_1 + P_2 + P_3 = 1$

$$\text{ومنه } P_3 = 1 - P_1 - P_2 = 1 - \frac{1}{12} - \frac{5}{12} = \frac{6}{12}$$

(2) عدد الكرات السوداء هو  $n_1 = p_1 \times 48 = 12$

عدد الكرات الحمراء هو  $n_2 = p_2 \times 48 = 16$

عدد الكرات البيضاء هو  $n_3 = p_3 \times 48 = 20$

### تطبيق 8

إيجاد الأمل الرياضي والانحراف المعياري

اليك قانون احتمال متغير عشوائي

$X$	-3	-2	1	2	3
$p_i$	0,1	0,35	0,15	9	0,2

احسب  $P(X=2)$  ثم  $E(X)$  و  $\sigma(X)$

✓ الحل

$$\text{نعلم أن } P(X=-3) + P(X=-2) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = 1$$

$$\text{ومنه } P(X=2) = 1 - [P(X=-3) + P(X=-2) + P(X=1) + P(X=3)] = 0,2$$

$$E(X) = (-3)(0,1) + (-2)(0,35) + 0,15 + 2 \times 0,2 + 3 \times 0,2 = 0,15$$

$$V(X) = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - E^2(X) = 9 \times 0,1 + 4 \times 0,35 + 0,15 + 4 \times 0,2 + 9 \times 0,2 - 0,0225$$

$$= 0,9 + 1,4 + 0,15 + 0,8 + 1,8 - 0,0225 = 6,3775$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 2,525$$

### تطبيق 9

قانون التوزيع المنتظم

تجربة تتمثل في رمي حجري نرد متزنين أوجه الأول مرقمة من 1 إلى 6

وللثاني ثلاثة أوجه تحمل الرقم 0 والأخرى تحمل الرقم 6.

$X$  هو المتغير العشوائي الذي يرفق بكل مخرج مجموع الرقمين المحصل عليهما، نفرض أن كل الخارج متساوية الاحتمال.

(1) اعط قانون احتمال  $X$

(2) احسب  $E(X)$  و  $\sigma(X)$

✓ الحل

(1) مجموعة قيم  $X$  هي 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12

$X$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p_i$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

$$E(X) = \frac{1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12}{12} = \frac{78}{12} = 6,5$$

$$V(X) = \frac{1}{12} + \frac{4}{12} + \frac{9}{12} + \frac{16}{12} + \frac{25}{12} + \frac{36}{12} + \frac{49}{12} + \frac{64}{12} + \frac{81}{12} + \frac{100}{12} + \frac{121}{12} + \frac{144}{12} - (6,5)^2$$

$$= 54,16 - 42,25 = 11,91$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{11,91} = 3,45$$

### تطبيق 10

إيجاد الأمل الرياضي والانحراف المعياري

كيس يحتوي على 5 كرات مرقمة كما يلي:

كرتان مرقمتان بـ 1 وأخريتان بـ 2 والخامسة بـ 3.

نسحب عشوائيا في نفس الوقت كرتين وليكن  $X$  المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب مجموع الرقمين.

(1) عين قيم  $X$  ثم عين قانون  $X$

(2) احسب  $E(X)$  و  $\sigma(X)$



✓ الحل

(1) مخارج هذه التجربة هي  $B_2 B_3, B_2 B_2, B_2 B_1, B_1 B_3, B_1 B_2, B_1 B_1, B_1 B_2, B_1 B_1, B_1 B_2, B_1 B_1$ .

وبالتالي عدد الحالات الممكنة هي 10

قيم المتغير العشوائي  $X$  هي 5, 4, 3, 2

$$P_1 = P(X=2) = \frac{1}{10}, \quad P_3 = P(X=4) = \frac{1}{10}$$

$$P_2 = P(X=3) = \frac{4}{10}, \quad P_4 = P(X=5) = \frac{4}{10}$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^4 x_i P_i = \frac{2}{10} + \frac{12}{10} + \frac{4}{10} + \frac{20}{10} = 3.8 \quad (2)$$

$$V(X) = \sum_{i=1}^4 x_i^2 P_i - E^2(X) = \frac{4}{10} + \frac{36}{10} + \frac{16}{10} + \frac{100}{10} - (3.8)^2 = 15.6 - 14.44 = 1.16$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1.16} = 1.077$$

تطبيق 11

تعيين قانون احتمال وحساب الأمل الرياضي والتعرف المعايير

نرمي كرتين  $A$  و  $B$  باتجاه حفرتين  $t_1$  و  $t_2$ . بحيث كل كرة تصل إلى  $t_1$  أو إلى  $t_2$  بنفس الاحتمال وكل حفرة يمكنها استيعاب كلتا الكرتين.

(1-1) اكتب قائمة كل المخارج الممكنة لهذه الرمية.

(ب) ما هو احتمال الحادث  $D$  « الكرتين في نفس الحفرة » ؟

(ج) ما هو الحادث العكسي لـ  $D$  ؟

(2) نربح 20 دج إذا دخلت الكرة في الحفرة  $t_1$  ونخسر 40 دج إذا دخلت في  $t_2$  وليكن  $X$  المتغير العشوائي الذي قيمته هي الربح (أو الخسارة) عند الرمي.

(أ) ما هي قيم  $X$  ؟ ثم أعط قانون احتمال  $X$

(ب) احسب  $E(X)$  و  $\sigma(X)$

✓ الحل

(1) المخارج الممكنة لهذه التجربة هي :

$$(Bt_1, At_2), (At_1, Bt_2), (At_1, Bt_1), (At_2, Bt_2)$$

فمثلاً الثنائية  $(At_2, Bt_2)$  تعبر عن أن الكرتين  $A$  و  $B$  في الحفرة  $t_2$

ومنه عدد الحالات الممكنة هي 4.

(ب) عدد الحالات الملائمة لتحقيق الحادث  $D$  هي 2 ومنه  $P(D) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

والحادث العكسي للحادث  $D$  هو الحادث « كل كرة في حفرة »

$X$	+40	-20	-80
$P_i$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

(2) قيم المتغير العشوائي  $X$  هي 40, -20, -80

الحادث «  $(X=40)$  » هو الكرتين في  $t_1$

وعدد الحالات الملائمة لتحقيقه هي 1

$$P(X=40) = \frac{1}{4}$$

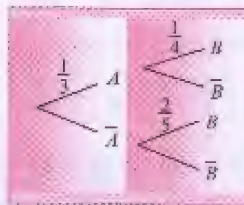
بنفس الطريقة نجد قيم احتمال الحوادث الأخرى.

$$E(X) = \sum_{i=1}^3 x_i P_i = 40 \times \frac{1}{4} - 20 \times \frac{2}{4} - 80 \times \frac{1}{4} = -20$$

$$V(X) = \sum_{i=1}^3 x_i^2 P_i - E^2(X) = 1600 \times \frac{1}{4} + 400 \times \frac{2}{4} + 6400 \times \frac{1}{4} - 400 = 1800$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1800} \approx 42$$

تطبيق 12 حساب احتمال حوادث باستعمال شجرة الاحتمالات



باستعمال المعطيات المدونة على الشجرة

الجاورة حدد ما يلي :

$$P_A(\bar{B}), P_A(B), P(\bar{A})$$

ثم استنتج  $P(A \cap \bar{B}), P(A \cap B)$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) \text{ و } P(\bar{A} \cap B)$$

✓ الحل

- حسب قانون العقد لدينا  $P(A) + P(\bar{A}) = 1$

$$\text{ومنه } P(\bar{A}) = 1 - P(A) = \frac{2}{3}$$

- حسب قانون العقد لدينا  $P_A(B) + P_A(\bar{B}) = 1$

$$\text{ومنه } P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B) = \frac{3}{4}$$

- لدينا  $P_{\bar{A}}(B) + P_{\bar{A}}(\bar{B}) = 1$

$$\text{ومنه } P_{\bar{A}}(\bar{B}) = \frac{3}{5}$$

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) \times P_A(\bar{B}) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(\bar{B}) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$



## تطبيق 13

## لنحسب حساب احتمال حوادث

أ و ب حادثان بحيث  $P(A) = \frac{2}{3}$  ،  $P(B) = \frac{1}{4}$  ،  $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$

(1) احسب  $P_A(B)$  ،  $P_B(A)$

(2) احسب  $P(\bar{A} \cap \bar{B})$  ثم استنتج  $P_A(\bar{B})$

✓ الحل

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{10} \quad (1)$$

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{5}$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] \quad (2)$$

$$= 1 - \left[ \frac{2}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right] = \frac{17}{60}$$

$$P_A(\bar{B}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{A})} = \frac{\frac{17}{60}}{\frac{1}{3}} = \frac{17}{20}$$

## لنحسب الاحتمالات الشرطية

## تطبيق 14

نفرض أن احتمال الأزدياد للجنسين متساوي مهما كانت رتبة هذه الولادة. نعتبر مجموعة تمثل عائلات لها طفلان ونختار منها عشوائيا عائلة.

(1) احسب احتمال الحوادث التالية :

A « العائلة لها ذكران »

B « الطفل الأكبر ذكر »

C « العائلة لها على الأقل ذكر »

D « الطفل الأصغر بنت »

(2) إذا علمت أن الطفل الأكبر ذكر احسب احتمال أن العائلة لها ذكران.

(3) احسب  $P_A(C)$  ،  $P_B(A)$  ،  $P_C(A)$

✓ الحل

(1) نرمز إلى البنت بـ F وإلى الذكر بـ M

عدد الحالات الممكنة لهذه التجربة هي 4 .

عدد الحالات الملائمة لـ A هي 1

$$P(A) = \frac{1}{4}$$

عدد الحالات الملائمة لـ B هي 2

$$P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

عدد الحالات الملائمة لـ C هي 3

$$P(C) = \frac{3}{4} = 0.75$$

عدد الحالات الملائمة لـ D هي 2

$$P(D) = \frac{2}{4} = 0.5$$

(2) احتمال أن يكون للعائلة ذكركين هو احتمال السلك المؤدي إلى MM ويساوي  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

(3)  $P_C(A)$  احتمال أن العائلة لها ذكران علما أن على الأقل لها ذكرواحد.

بما أن A محتواة في C فإن  $A \cap C = A$

$$P_C(A) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{P(A)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

$$P_D(A) = \frac{P(D \cap A)}{P(D)} = \frac{0}{P(D)} = 0 \quad \text{فإن } A \cap D = \emptyset$$

$$P_A(C) = \frac{P(A \cap C)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1 \quad \text{فإن } A \subset C$$

## لنحسب مصادقية فحص طبي

## تطبيق 15

نشخص مريض m بواسطة فحص طبي. وليكن T الحادث « الفحص موجب »

و M الحادث « الشخص مريض »

(1) إذا علمت أن  $P_M(T) = 0.95$  و  $P_{\bar{M}}(\bar{T}) = 0.95$  ، عبر بواسطة جمل عن

معنى هاتين الاحتماليتين

(2) إذا علمت أن 95% من الأشخاص حاملون للمرض m ما هو احتمال أن

شخص له فحص موجب يكون مريضا ؟

✓ الحل

(1)  $P_M(T)$  هو احتمال أن يكون الفحص موجبا علما أن الشخص مريض

$P_{\bar{M}}(\bar{T})$  هو احتمال أن الفحص سالب علما أن الشخص سليم.

$P_M(T) = 0.95$  و  $P_{\bar{M}}(\bar{T}) = 0.95$  يعني أن هذا الفحص له مصادقية

أي في 95% من الحالات يستطيع تشخيص المرض إن وجد.



(2) 0,5% من الأشخاص حاملون المرض

$$P(M) = \frac{0,5}{100} = 0,005$$

يعني أن احتمال الحادث أن شخصا له فحص موجب يكون مريضا

$$P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)}$$

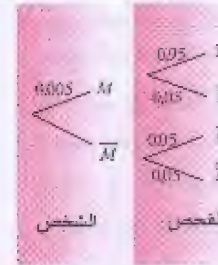
$$P_{\bar{T}}(\bar{M}) = \frac{P(\bar{M} \cap \bar{T})}{P(\bar{M})} = \frac{P(\bar{M} \cup \bar{T})}{1 - P(M)} = \frac{1 - P(M \cup T)}{1 - P(M)}$$

$$P_{\bar{T}}(\bar{T}) = \frac{1 - P(M) - P(T) + P(M \cap T)}{1 - P(M)}$$

$$0,95 = \frac{1 - 0,005 - P(T) + 0,95 \times 0,005}{1 - 0,005}$$

$$P(T) = 0,0545 \quad \text{إذن} \quad -P(T) + 0,99975 = 0,995 \times 0,005$$

$$P_T(M) = \frac{0,005 \times 0,95}{0,0545} = 0,087$$



تطبيق 17

الاحتمالات الشرطية

أ و ب كبسان حيث أ يشمل 10 كرات منها 4 حمراء و ب يشمل 8 كرات منها 5 حمراء. نختار عشوائيا كيسا وكرة منه ونرمز بـ E إلى الحادث « اختيار الكيس A »  
R إلى الحادث « الكرة المختارة حمراء »  
(1) احسب  $P_E(R)$  و  $P_{\bar{E}}(R)$  ثم استنتج  $P(R)$ .  
(2) إذا علمت أن هذه الكرة حمراء ما هو احتمال أن تكون من الكيس A ؟

الحل

(1) في المستوى الأول نختار الكيس.

وا احتمال كل واحد منهما هو  $\frac{1}{2}$

في المستوى الثاني لدينا اختيارين لكل كيس وهما :

إما الكرات للحمراء (R)

وإما الكرات للبيضاء (R-bar)

$P_E(R)$  هو احتمال أن تكون الكرة حمراء علما أنها

$$P_E(R) = \frac{4}{10} \quad \text{إذن} \quad P_{\bar{E}}(R) = \frac{5}{8}$$

$P_{\bar{E}}(R)$  هو احتمال أن تكون الكرة حمراء علما أنها بيضاء من الكيس B.

$$P_{\bar{E}}(R) = \frac{5}{8}$$

$$P(R) = P(E) \times P_E(R) + P(\bar{E}) \times P_{\bar{E}}(R) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{10} + \frac{1}{2} \times \frac{5}{8} = \frac{2}{10} + \frac{5}{16} = 0,51$$

(2) احتمال أن هذه الكرة من الكيس A علما أنها حمراء هو  $P_R(E)$

$$P_R(E) = \frac{P(E \cap R)}{P(R)} = \frac{P(E) \times P_E(R)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{4}{10}}{0,51} = \frac{0,2}{0,51} = 0,39$$

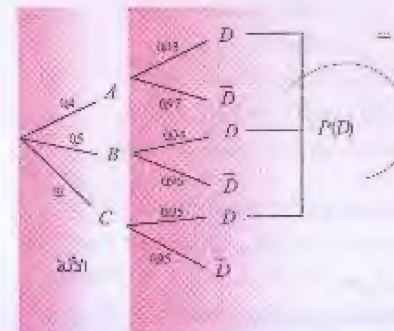
السحب على التوالي بالإرجاع وبدون إرجاع

تطبيق 18

كيس يحتوي على 5 كرات منها 3 لونها أحمر و 2 أسود.  
التجربة الأولى : نسحب عشوائيا كرة ونسجل لونها ثم نعيدها إلى الكيس.  
ثم نسحب مرة أخرى ونسجل لونها.  
التجربة الثانية : نسحب كرتين الواحدة تلو الأخرى وبدون إرجاع ونسجل لونهما.

(1) أنشئ لكليتي التجربتين شجرة الاحتمالات والإمكانات.

(2) ما هو احتمال التحصل على كرتين حمراويتين في كلتي التجربتين ؟



(1) نسمي D الحادث « البرغي قاسد »

$$P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) + P(C \cap D) = P(A) \times P_A(D) + P(B) \times P_B(D) + P(C) \times P_C(D) = 0,4 \times 0,03 + 0,5 \times 0,04 + 0,1 \times 0,05 = 0,037$$

(2) احتمال هذا الحادث هو  $P_D(B)$

$$P_D(B) = \frac{P(D \cap B)}{P(D)}$$

$$P_D(B) = \frac{P(B) \times P_B(D)}{P(D)}$$

$$= \frac{0,5 \times 0,04}{0,037} = 0,54$$



✓ الحل

(1) تفسير الشجرة الأولى

في المستوى الأول :

كتمينا  $\frac{3}{5}$  و  $\frac{2}{5}$ فالعدد  $\frac{3}{5}$  يمثل نسبة الكرات الحمراء في الكيسوالعدد  $\frac{2}{5}$  يشمل نسبة الكرات السوداء في الكيس.

في المستوى الثاني :

بما أن السحب تم بالإرجاع فإن النسب تبقى نفسها.

تفسير الشجرة الثانية

في المستوى الأول :

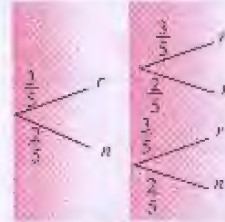
له نفس تفسير المستوى الأول للشجرة الأولى.

في المستوى الثاني :

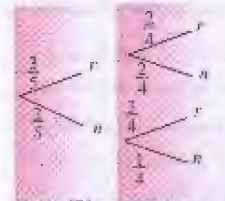
بما أن السحب تم بالإرجاع فإن عندما نتحصل على كرة

حمراء في السحب الأول فإن نسبة الكرات الحمراء المتبقية هي  $\frac{3}{4}$ ونسبة الكرات السوداء هي  $\frac{2}{4}$  ونفس الشيء إذا حصلنا على

الكرة السوداء في السحب الأول.

(2)  $E_1$  الحادث « سحب كرتين حمراويتين » في التجربة الأولى.هناك مسلك وحيد  $\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5}$  الذي يوافق الحادث  $E_1$ ومنه  $P(E_1) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$  $E_2$  الحادث « سحب كرتين حمراويتين » في التجربة الثانيةهناك مسلك وحيد يوافق هذا الحادث هو  $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4}$ ومنه  $P(E_2) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$ 

شجرة التجربة (1)



شجرة التجربة (2)

الكيس C يشمل 8 كرات واحدة تحمل الرقم 1000 وخمسين الرقم 20، واثنان تحملان الرقم 0.

تسحب عشوائيا كرة من الكيس A، وحسب نتيجة هذا السحب ن سحب كرة إما من الكيس B أو من C.

نرمز بقيمة الدينار الرقم المسجل على الكرة المسحوبة.

(أ) انشئ شجرة الاحتمالات والإمكانات.

ما هو احتمال ربح 1000 دج ؟

(ب) ما هو احتمال ربح 20 دج ؟

✓ الحل

(أ) هناك مسلك وحيد يوافق الحادث « ربح 1000 دج »

وهو  $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{5}$  C

واحتماله هو جداء الاحتمالات الوجودية على المسلك

أي  $P(1000) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{40} = 0.025$ 

(ب) هناك مسلكان يوافقان هذا الحادث هما :

 $\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{2}{5}$  B و  $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{5}$  C

واحتماله هو مجموع احتمالي المسلكين.

لأن  $P(20) = P_1(20) + P_2(20) = \frac{4}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{2}{8} = \frac{8}{25} + \frac{1}{8} = \frac{89}{200} = 0.445$ 

## تعيين قانون احتمال متغير عشوائي

## تطبيق 20

تسحب عشوائيا كرة واحدة من كيس يحتوي على أربع كرات :

اثنان منها لونهما أحمر  $R_1, R_2$  والثالثة أخضر V والرابعة أبيض B.

ويكون إرجاع الكرة سحب كرة أخرى للمرة الثانية.

نتيجة هذه التجربة عبارة عن ثنائية عنصرها الأول هو الكرة المحصل عليها

في السحب الأول وعنصرها الثاني هو الكرة المحصل عليها في السحب الثاني.

نفرض أن كل الثنائيات متساوية الاحتمال.

(1) مثل هذه الوضعية بشجرة الاحتمالات.

(2) نرفق الوضعية السابقة بقاعدة لعبة :

لكل كرة حمراء مسحوبة نربح 100 دج والخضراء 200 دج

أما البيضاء فنخسر 200 دج وليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة

ممكنة الربح (أو الخسارة) المحصل عليها.

عين مجموعة قيم X ثم اعط قانون احتمالها، ثم احسب  $E(X)$ 

## تطبيق 19 السحب من ثلاثة أكياس مختلفة

## تطبيق 19

لنكن ثلاثة أكياس A، B، C بحيث :

الكيس A يشمل 5 كرات أربع منها تحمل الحرف B والخامسة الحرف C.

الكيس B يشمل 5 كرات منها 3 تحمل الرقم 10 واثنان الرقم 20.



✓ الحل

(1) عدد الحالات الممكنة لهذه التجربة هو 12

(2) قيم المتغير العشوائي  $X$  هي 200 ، 300 ، -100 ، 0

- الحادث ( $X=0$ ) هو الحصول على كرة خضراء وكرة بيضاء وعدد الحالات الملائمة له هو 2

$$P(X=0) = \frac{2}{12}$$

- الحادث ( $X=200$ ) هو الحصول على كرتين حمزوايتين وعدد الحالات الملائمة له هو 2

$$P(X=200) = \frac{2}{12}$$

- الحادث ( $X=300$ ) هو الحصول على كرة حمراء و كرة خضراء وعدد الحالات الملائمة له هو 4

$$P(X=300) = \frac{4}{12}$$

- الحادث ( $X=-100$ ) هو الحصول على كرة حمراء و كرة بيضاء وعدد الحالات الملائمة هو 4

$$P(X=-100) = \frac{4}{12}$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i P_i = 0 \times \frac{2}{12} + 200 \times \frac{2}{12} + 300 \times \frac{4}{12} + (-100) \times \frac{4}{12} = 100$$



$X$	0	200	300	-100
$P_i$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{4}{12}$

### تطبيق 21

قصاصة متزنة لها وجه أحمر و الآخر أخضر، نرمي هذه القصاصة ثلاث مرات متتالية ونسجل في كل مرة لون الوجه العلوي بعد التسقوط.

نرمز بـ  $X$  إلى عدد مرات ظهور اللون الأحمر ( $R$ ) في الرمييتين الأوليتين، وبـ  $Y$  إلى عدد مرات ظهور الوجه الأخضر ( $V$ ) في الرميات الثلاثة.

(1) أعط قانوني احتمال  $Y$  و  $X$ .

(2) احسب  $E(X)$  و  $E(Y)$  و  $V(X)$  و  $V(Y)$ .

(3) احسب  $P((X=1) \cap (Y=2))$ ، هل المتغيرين  $X$  و  $Y$  مستقلين؟

✓ الحل

(1) قيم  $X$  هي 0 ، 1 ، 2

وعدد الحالات الممكنة هو 4

• الحادث ( $X=0$ ) هو الحصول على وجهين أحمرين

في الرمييتين الأوليتين وعدد الحالات الملائمة له هو 1

$$P(X=0) = \frac{1}{4}$$

• الحادث ( $X=1$ ) هو ظهور اللون الأحمر مرة واحدة وعدد الحالات الملائمة له هو 2

$$P(X=1) = \frac{2}{4}$$

• قيم  $Y$  هي 0 ، 1 ، 2 ، 3

عدد الحالات الممكنة هو 8

( $Y=0$ ) الحادث عدم ظهور كرة خضراء

في الرميات الثلاث وعدد الحالات الملائمة لتحقيقه هو 1

$$P(Y=0) = \frac{1}{8}$$

• الحادث ( $Y=1$ ) ظهور مرة واحدة كرة خضراء في الرميات الثلاث

وعدد الحالات الملائمة لتحقيقه هو 3

$$P(Y=1) = \frac{3}{8}$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i P_i = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{2}{4} + 2 \times \frac{1}{4} = 1$$

$$V(X) = \frac{2}{4} + 4 \times \frac{1}{4} - 1 = \frac{6}{4} - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

$$E(Y) = \frac{3}{8} + \frac{6}{8} + \frac{3}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

$$V(Y) = 1 \times \frac{3}{8} + 4 \times \frac{3}{8} + 9 \times \frac{1}{8} - \frac{9}{4} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

(3) الحادث ( $Y=2$ ) و ( $X=1$ ) معناه ظهور مرة واحدة اللون الأحمر في الرمييتين الأولى والثانية

وظهور مرتين اللون الأخضر في الرميات الثلاث.

هناك مسلكان وحينئذ لتحقيق هذا الحادث وهما:

$$\bullet \frac{1}{2} R \bullet \frac{1}{2} V \bullet \frac{1}{2} V \text{ و } \bullet \frac{1}{2} V \bullet \frac{1}{2} R \bullet \frac{1}{2} V$$

وحسب قاعدة احتمال مسلك فإن :

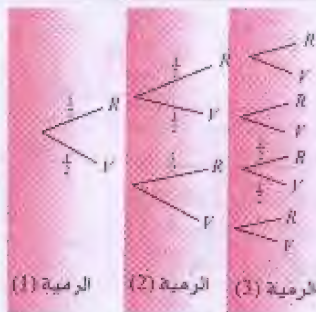
$$P[(X=1) \cap (Y=2)] = (\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^3 + (\frac{1}{2})^3 = 2 \times (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{4}$$

$$P(Y=2) = \frac{3}{8} \text{ و } P(X=1) = \frac{1}{2}$$

$$P(X=1) \times P(Y=2) = \frac{3}{16}$$

$$P[(X=1) \cap (Y=2)] \neq P(X=1) \times P(Y=2) \text{ إذن}$$

وهذا يعني أن المتغيرين  $X$  و  $Y$  مرتبطان.



$X$	0	1	2
$P_i$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

$Y$	0	1	2	3
$P_i$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

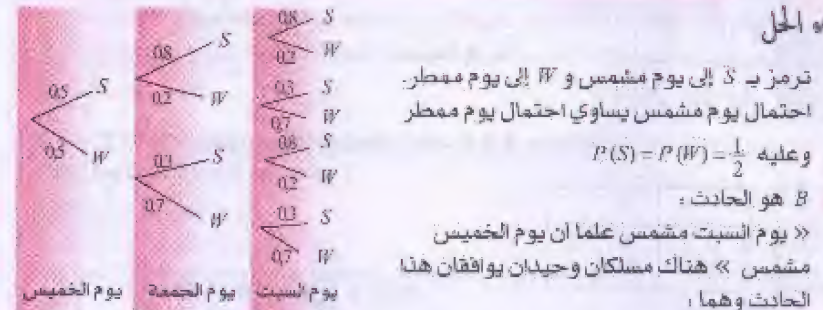


## تطبيق 22

## تطبيق الاحتمال الشرطي - الأحوال الجوية

دراسة إحصائية حول الأحوال الجوية سمحت لنا بتقدير أنه إذا كان يوم ما مشمساً فإن احتمال أن يكون اليوم الموالي له مشمساً هو 0,80 وإذا كان ممطراً فإن احتمال أن يكون اليوم الذي يليه مشمساً هو 0,3 (1) إذا كان يوم الخميس مشمساً ما هو احتمال أن يكون يوم السبت مشمساً؟ (2) ما هو احتمال أن يكون يوم السبت مشمساً إذا كان يوم الخميس ممطراً؟

## الحل



$$S \xrightarrow{0.5} S \xrightarrow{0.8} S \text{ و } S \xrightarrow{0.5} W \xrightarrow{0.2} S \text{ و } W \xrightarrow{0.5} S \xrightarrow{0.3} S$$

$$\text{ومنه } P(B) = 0,5 \times 0,2 \times 0,3 + 0,5 \times 0,8 \times 0,8 = 0,35$$

(2) الحادث  $A$  «يوم السبت مشمس علماً أن يوم الخميس ممطر»  
هناك مسلكان وحيدان يوافقان هذا الحادث وهما:

$$W \xrightarrow{0.5} W \xrightarrow{0.7} W \xrightarrow{0.3} S \text{ و } W \xrightarrow{0.5} S \xrightarrow{0.3} S$$

$$\text{ومنه } P(A) = 0,5 \times 0,7 \times 0,3 + 0,5 \times 0,3 \times 0,7 = 0,21$$

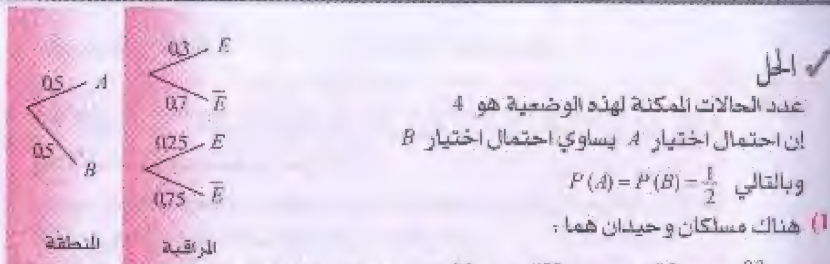
## تطبيق 23

## تطبيق المراقبة الجبائية - الاحتمال الشرطي

تسمى  $E$  الحادث «التعرض لمراقبة جبائية» بالنسبة إلى مؤسسة موجودة في منطقة  $A$  احتمال الحادث  $E$  هو 0,3 وبالنسبة إلى أخرى موجودة في منطقة  $B$  هو 0,25 مجموعة تملك مؤسستين واحدة في  $A$  والأخرى في  $B$  تقبل أن المراقبة المنجزة في  $A$  مستقلة عنها في  $B$ .

احسب احتمالات كل حادث من الحادثين التاليين:

- (1)  $F_1$  هو الحادث «المؤسستان تعرضتا إلى المراقبة».
- (2)  $F_2$  هو الحادث «مؤسسة واحدة تعرضت للمراقبة».



$$E \xrightarrow{0.5} A \xrightarrow{0.5} E \text{ و } E \xrightarrow{0.5} B \xrightarrow{0.25} E$$

$$\text{إذن } P(E_1) = 0,5 \times 0,3 + 0,5 \times 0,25 = 0,15 + 0,125 = 0,275$$

(2) هناك مسلكان وحيدان يوافقان الحادث  $E_2$  وعليه:

$$E_2 = ((A \cap B) \cap (B \cap \bar{E})) \cup ((A \cap \bar{E}) \cap (B \cap E))$$

$$P(E_2) = P((A \cap B) \cap (B \cap \bar{E})) + P((A \cap \bar{E}) \cap (B \cap E))$$

$$= P(A \cap B) \times P(B \cap \bar{E}) + P(A \cap \bar{E}) \times P(B \cap E)$$

$$= 0,5 \times 0,3 + 0,5 \times 0,25 + 0,5 \times 0,7 \times 0,5 \times 0,25 = 0,6062$$

## تطبيق الاحتمالات الشرطية والتتاليات

## تطبيق 24

كيس يحتوي على ثلاث قطع نقدية لا تفرق بينها عند اللمس، اثنتان منها عادية ( $N$ ) أي لها الوجه ( $F$ ) والظهر ( $P$ ) والثالثة مزيفة ( $T$ ) تحمل وجهين ( $F$ ).  
نختار عشوائياً قطعة ونقوم بصفة مستقلة برميات متتالية لهذه القطعة وليكن الحادثان  $L$  و  $F_n$  حيث:

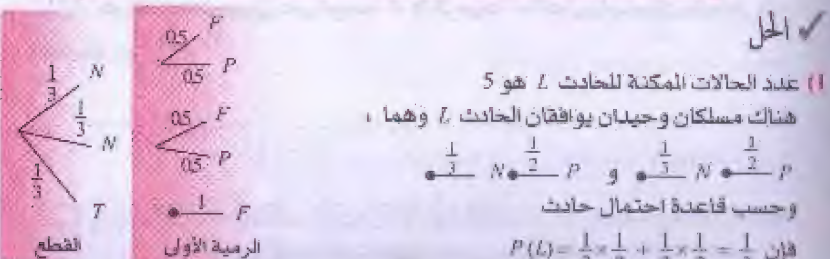
$L$  «نتحصل على الظهر  $P$  في الرمية الأولى»

$F_n$  «نتحصل على الوجه  $F$  في الرميات  $n$  الأولى»

$$(1) \text{ احسب احتمال الحادث } L \text{ ثم بين أن } P(F_n) = \frac{1}{3} \left[ 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^n \right]$$

(2) إذا علمت أننا تحصلنا على الوجه ( $F$ ) في الرميات  $n$  الأولى ما هو احتمال أننا اخترنا القطعة المزيفة؟

ما هي نهاية هذا الاحتمال لـ  $n$  يؤول إلى  $(+\infty)$ ؟



$$P \xrightarrow{\frac{1}{3}} P \xrightarrow{\frac{1}{2}} P \text{ و } P \xrightarrow{\frac{1}{3}} F \xrightarrow{\frac{1}{2}} P$$

وحسب قاعدة احتمال حادث

$$\text{فإن } P(L) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$



نبرهن على المساواة  $P(F_n) = \frac{1}{3} \left[ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right]$  بالراجع على  $n$ .

من أجل  $n=1$  لدينا  $P(F_1) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \left[ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^0 \right]$

ومنه الخاصية صحيحة من أجل  $n=1$

نفرض أنها صحيحة من أجل  $n$  ونبرهن صحتها من أجل  $n+1$ .

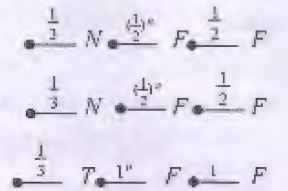
بما أن الرميات مستقلة فيها بينها فإن احتمال ظهور

الوجه  $F$  في الرميات  $n$  الأولى هو جداء احتمالات

ظهور الوجه  $F$  في كل رمية

$$\text{أي } \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right) \times \dots \times \left(\frac{1}{2}\right)}_{n \text{ مرة}} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

هناك ثلاث مسالك وحيدة توافق الحادث  $F_{n+1}$  وهي :



وحسب قاعدة الاحتمال فإن :

$$P(F_{n+1}) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 1^n \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \left[ \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 1 \right]$$

$$= \frac{1}{3} \left[ 1 + 2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right] = \frac{1}{3} \left[ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n \right]$$

إذن الخاصية صحيحة من أجل  $n+1$

وبالتالي فالخاصية صحيحة من أجل كل  $n$  من  $\mathbb{N}^*$

(2)  $P_{F_n}(T)$  هو احتمال الحادث

« استعمال القطعة المزينة علما أننا حصلنا على الوجه  $F$  في الرميات  $n$  الأولى »

$$P_{F_n}(T) = \frac{P(F_n \cap T)}{P(F_n)}$$

$F_n \cap T$  هو الحادث الحصول على الوجه  $F$  في الرميات  $n$  الأولى باستعمال القطعة (T)

واحتماله هو  $\frac{1}{3}$

$$P_{F_n}(T) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} \left[ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right]} = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} \quad \text{إذن}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P_{F_n}(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} = 1$$

## تطبيق 25

مجموعة حساب الاحتمالات الشرطية

في جبل الشريعة عائلتان A و B يوضع تحت تصرفهما خمسة مسالك

$C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$ .

(I) في كل صباح تختار كل عائلة عشوائيا وباستقلالية عن العائلة الأخرى مسلكا.

(1) ما هو عدد الحالات الممكنة لكلتا العائلتين ؟

(2) ما هو احتمال أن يختارا نفس المسلك ؟

(3) ما هو احتمال أنهما في ظرف  $n$  يوم متتالية لا تختاران أبدا نفس المسلك ؟

(4) عين أصغر قيمة لـ  $n$  التي من أجلها احتمال التلاقي على الأقل مرة واحدة على نفس المسلك أكبر من أو يساوي 0,9 .

(II) نعتبر في هذا الجزء يومين متتاليين حيث تلغي كل عائلة في اليوم الثاني من سحبيها كل مسلك أخذته في اليوم السابق إذن تبقى أربعة مسالك

$E$  هو الحادث « تختار العائلتان نفس المسلك في اليوم الأول »

$F$  هو الحادث « تختار العائلتان نفس المسلك في اليوم الثاني »

احسب  $P(E)$  ،  $P_E(F)$  ، ثم  $P_E(F)$  ،  $P(F \cap E)$  ،  $P(F \cap \bar{E})$  واستنتج  $P(F)$ .

الحل

(1) نستعمل طريقة ملء الخانات لتعيين عدد الحالات الممكنة العائلة A لها 5 اختيارات ومن أجل كل اختيار لـ A

يوجد 5 اختيارات لـ B

وبالتالي عدد الحالات الممكنة هو  $5 \times 5 = 25$

عدد الحالات الممكنة لاختيار نفس المسلك هو 5

أي إذا كان لـ B خمسة اختيارات فإن B له اختيار واحد

وبالتالي احتمال هذا الحادث هو  $\frac{5}{25} = \frac{1}{5}$ .

(2)  $S$  هو الحادث « لا تختار العائلتان نفس المسلك في اليوم الأول »

عدد الحالات الملائمة لتحقيق الحادث  $S$  هو  $5 \times 4 = 20$

$$\text{وبالتالي } P(S) = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$$

الحادث الذي نبحث عن احتماله هو  $S \cap S \cap \dots \cap S$

إذن احتماله هو :

$$P(S \cap S \cap \dots \cap S) = P(S) \times P(S) \times \dots \times P(S) = (P(S))^n = \left(\frac{4}{5}\right)^n$$

(4) الحادث العكسي للحادث  $D$  « التلاقي على الأقل مرة واحدة على نفس المسلك »

هو الحادث « لا تلتقي العائلتان أبدا في نفس المسلك على مدار  $n$  يوم »



ليكن  $R h +$  الحادث « الشخص المختار له العامل  $R h +$  »

و  $O$  هو الحادث « الشخص ينتمي إلى فصيلة  $O$  »

(أ) عين الاحتمال  $P_1$  أي  $P(R h +)$  ثم احسب  $P_2$

(ب) اكمل الشجرة وذلك باستبدال كل علامة استفهام بالاحتمال الموافق لها.  
(1-2) انطلاقا من الشجرة كيف نستطيع تعيين احتمال  $O$ ؟ ثم تحقق من هذه النتيجة من الجدول.

(ب) ما هو احتمال ان شخص فصيلة دمه  $O$  يحمل العامل  $R h +$ ؟

(1-3) نعتبر  $n$  شخصا مختارا عشوائيا من مجتمع.

احسب بدلالة « الاحتمال  $P$  بحيث يكون من بين  $n$  شخص علي الأقل واحد فصيلته  $O$  » ثم احسب نهايته.

(ب) احسب اصغر قيمة لـ  $n$  بحيث  $P \geq 0,999$

الحل ✓

$$P_1 = P(R h +) = P(R h + \cap O) + P(R h + \cap A) + P(R h + \cap B) + P(R h + \cap AB) \\ = 0,35 + 0,381 + 0,062 + 0,028 = 0,821$$

$$P_2 = P(O) = \frac{P(O \cap R h +)}{P(R h +)} = \frac{0,35}{0,821} = 0,426$$

هناك مسلكان يوافقان الحادث  $O$  وحسب قاعدة الاحتمال فإن:

$$P(O) = 0,821 \times 0,426 + 0,179 \times 0,503 \\ = 0,350 + 0,09 = 0,44$$

من الجدول نجد  $P(O) = 0,35 + 0,09 = 0,44$

$$P_O(R h +) = \frac{P(O \cap R h +)}{P(O)} \\ = \frac{0,426 \times 0,821}{0,44} = \frac{0,35}{0,44} = 0,80$$

الحادث الذي نريد حساب احتماله هو الحادث العكسي للحادث

« لا يوجد أي شخص من بين  $n$  شخص فصيلة دمه  $O$  »

احتمال الحادث « شخص فصيلته مختلفة عن  $O$  » هو:

$$P(\bar{O}) = 1 - P(O) = 0,54$$

$$P = 1 - P(\bar{O}) \times P(\bar{O}) \times \dots \times P(\bar{O}) = 1 - (0,54)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - (0,54)^n = 1$$

نفسر النهاية على ان كلما كان  $n$  كبيرا بالقدر الكافي يكون هذا الحادث أكيدا.

$$P \geq 0,999 \text{ يعني } 1 - (0,54)^n \geq 0,999 \text{ وبعد حل هذه التراجحة نجد } n > \frac{\ln(0,001)}{\ln(0,54)}$$

ومنه اصغر قيمة لـ  $n$  هي 12

$$P(D) = 1 - P\left(\frac{S \cap S \cap \dots \cap S}{n}\right) = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n$$

$$P(D) \geq 0,9 \text{ يعني } 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n \geq 0,9 \text{ اي } \left(\frac{4}{5}\right)^n \leq 0,1$$

وبالتالي  $n \geq 8,005$

إذن اصغر قيمة لـ  $n$  المطلوبة هي 9.

(II) عدد الحالات الملائمة لتحقيق الحادث  $E$  هو 5

أي من أجل كل اختيار لـ  $A$  يوجد اختيار واحد لـ  $B$

$$P(E) = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$$

—  $P_E(F)$  هو احتمال الحادث « تختار العائلتان نفس المسلك في اليوم الثاني علما انهما اخذا نفس المسلك في اليوم الأول »

نستعمل طريقة ملء الخانات لتعيين عدد الحالات الممكنة.

بما ان كل عائلة تختار مسلك من بين أربعة مسالك فإن عدد الإمكانيات هو  $4 \times 4 = 16$  وعدد الحالات الملائمة هو 4

$$P_E(F) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

و من أجل شجرة الاحتمالات المجاورة يكون لدينا:

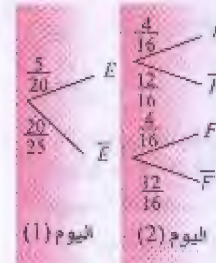
$$P_{\bar{E}}(F) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

$$P(E \cap F) = P(E) \times P_E(F) \text{ ومنه } P_E(F) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)}$$

$$P(E \cap F) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{20} \text{ اي}$$

$$P(F \cap \bar{E}) = P(\bar{E}) \times P_{\bar{E}}(F) = \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{5}$$

$$P(F) = P(E) \times P_E(F) + P(\bar{E}) \times P_{\bar{E}}(F) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{20} + \frac{1}{5} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$



### حساب الاحتمالات الشرطية

### تطبيق 26

الجدول التالي يمثل توزيع الزمر الدموية لبلد ما:

	O	A	B	AB
Rhésus (+)	35,0%	38,1%	0,2%	2,8%
Rhésus (-)	9,0%	7,2%	1,2%	0,5%

(1) السؤال هو اكمل الشجرة السابقة وهذا باستعمال معطيات الجدول.

التجربة تتمثل في اختيار شخص عشوائيا من المجتمع.



تطبيق 27

الاحتمالات الشرطية في مسابقة رمي الرمح

شارك متنافسان A و B في مسابقة تتمثل في رمي رمح على هدف مجزا إلى ثلاث خانة (1)، (2)، و (3). وتقبل أنه عند كل رمية يصيب كل منهما خانة وحيدة وأن الرميات مستقلة فيما بينها.

بالنسبة إلى المتنافسين A، احتمالات إصابة الخانات (1)، (2)، (3) هي على التوالي:

$$\frac{7}{12}, \frac{1}{3}, \frac{1}{12}$$

بالنسبة إلى المتنافسين B، كل الخارج متساوية الاحتمال.

(1) التسابق A يقوم بثلاث رميات مستقلة فيما بينها.

(أ) ما هو احتمال أن يصيب في كل مرة الخانة 3؟

(ب) ما هو احتمال أن يصيب الخانات (1)، (2)، (3) في الرميات 1، 2، و 3 على الترتيب.

(ج) ما هو احتمال أن يصيب الخانات (1)، (2)، (3)؟

(2) نختار عشوائيا واحدا من المتنافسين بحيث احتمال اختيار A يساوي ضعف اختيار B.

(أ) تنجز رمية واحدة، ما هو احتمال أن تصاب الخانة (3)؟

(ب) أنجزت رمية وحيدة والخانة (3) أصيبت، ما هو احتمال أن A هو الذي سدد الرمح؟

✓ الحل

(1) احتمال أن يصيب في كل مرة الخانة (3) هو  $(\frac{1}{12})^3 = 0.583$

(ب) احتمال أن يصيب الخانات (1)، (2)، (3) في الرميات 1، 2، و 3 على التوالي هو:

$$\frac{1}{12} \times \frac{1}{3} \times \frac{7}{12} = 0.016$$

(3)  $\frac{7}{12}$  (2)  $\frac{1}{3}$  (1)  $\frac{1}{12}$  (السلك الموافق للخانات)

(ج) توجد 6 مسالك لها نفس الاحتمال توافق الحادث الذي نبحث عن احتماله. وبالتالي احتمال الحادث الذي نبحث عنه

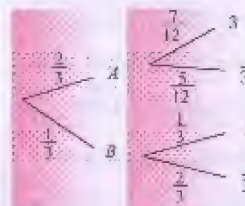
$$6 \left( \frac{1}{12} \times \frac{1}{3} \times \frac{7}{12} \right) = \frac{7}{72}$$

(2) - بما أن  $P(A) + P(B) = 1$  و  $P(A) = 2P(B)$

$$P(B) = \frac{1}{3} \text{ و } P(A) = \frac{2}{3}$$

(أ) هناك مسلكان يوافقان هذا الحادث وهما:

$$\frac{7}{12} \text{ (3) } A \text{ و } \frac{1}{3} \text{ (3) } B$$



وحسب قاعدة احتمال حادث فإن احتمال الحادث المعطى هو:

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{7}{12} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$P_3(A) = \frac{P(3 \cap A)}{P(3)} = \frac{\frac{2}{3} \times \frac{7}{12}}{\frac{1}{2}} = \frac{7}{9}$$

تطبيق 28

التعرف على استقلالية حوادث

نرمي حجر نرد متزن مرتين متتاليتين، أوجهه مرقمة من 1 إلى 6. ولنعتبر الأحداث التالية:

A الحادث « الرقم الأول المحصل عليه زوجي »

B الحادث « الرقم الثاني المحصل عليه زوجي »

C الحادث « مجموع الرقمين المحصل عليهما زوجي »

(1) احسب  $P(C)$ ،  $P(B)$ ،  $P(A)$

(2) احسب  $P(A \cap B)$ ،  $P(B \cap C)$  و  $P(C \cap A)$  هل الحوادث A، B، C

مستقلة مثنى مثنى؟

(3) احسب  $P(A \cap B \cap C)$  وهل  $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$ ؟

✓ الحل

$$(1) \text{ لدينا } P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\text{و } P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\text{و } P(C) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$(2) \text{ لدينا } P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

$$\text{و } P(B \cap C) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

$$\text{و } P(C \cap A) = \frac{1}{4}$$

وبالتالي نستنتج أن الحوادث A، B، C مستقلة مثنى مثنى.

$$(3) \text{ لدينا } P(A) \times P(B) \times P(C) = \frac{1}{8} \text{ و } P(A \cap B \cap C) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

$$\text{ومنه } P(A \cap B \cap C) \neq P(A) \times P(B) \times P(C)$$

إذن A، B، C ليست مستقلة إجمالاً.





تطبيق 29

المجموع المتتاليات والاحتمالات الشرطية

يونس يقوم بلعبة، بحيث حظوظ الريح هي نفس حظوظ الخسارة في شوطها الأول. وتقبل أنه إذا ربح شوطاً من هذه اللعبة فإن احتمال ربح الشوط اللوائي له هو 0.4 وإذا خسر شوطاً فإن احتمال خسارة الشوط اللوائي هو 0.8.

« عدد طبيعي غير معلوم »  
الحادث « يربح الشوط رقم  $n$  »  
الحادث « يخسر الشوط رقم  $n$  »

(1) احسب ما يلي :  $P(G_1)$  ،  $P_{G_1}(G_2)$  ،  $P_{G_1}(G_3)$  ، واستنتج  $P(G_2)$  ،  $P(G_3)$  احسب (2)

(II) من أجل كل  $n$  غير معلوم نضع  $x_n = P(G_n)$  و  $y_n = P(P_n)$

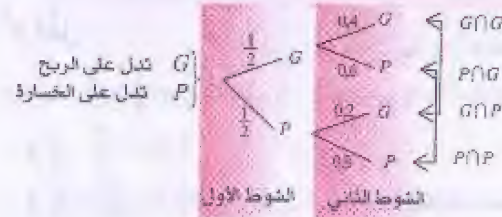
(1) عين من أجل كل  $n \in \mathbb{N}^*$  يكون  $P_{G_n}(G_{n+1})$  و  $P_{P_n}(P_{n+1})$

(2) بين أنه من أجل كل  $n \in \mathbb{N}^*$  يكون  $x_{n+1} = 0.4x_n + 0.2y_n$   
 $y_{n+1} = 0.6x_n + 0.8y_n$

(3) من أجل كل  $n \in \mathbb{N}^*$  نضع  $P_n = x_n + y_n$  و  $W_n = 6x_n - 2y_n$  بين أن  $(P_n)$  ثابتة و  $(W_n)$  هندسية يطلّب تعيين حدها العام.

(4) استنتج عبارة  $x_n$  بدلالة  $n$  ثم عين نهاية  $(x_n)$  ماذا تستنتج ؟

✓ الحل



(1-1)  $G_1$  هو الحادث « يونس يربح الشوط (1) »

ومنه  $P(G_1) = \frac{1}{2}$

(2)  $P_{G_1}(G_2)$  احتمال الريح في الشوط (2) علماً أنه ربح في الشوط (1)

لأن  $P_{G_1}(G_2) = 0.4$  و  $P_{G_1}(G_3) = 0.2$

لدينا  $P(G_2) = P(G \cap G) + P(P \cap G)$

لأن  $P(G_2) = \frac{1}{2} \times 0.4 + \frac{1}{2} \times 0.2 = 0.3$

(2) لدينا  $P(P_2) = P(P \cap P) + P(G \cap P)$

لأن  $P(P_2) = \frac{1}{2} \times 0.8 + \frac{1}{2} \times 0.6 = 0.4 + 0.3 = 0.7$

(1-II)  $P_{G_n}(P_{n+1})$  هو احتمال خسارة الشوط  $(n+1)$  علماً أنه خسر الشوط  $(n)$

وبالتالي  $P_{G_n}(P_{n+1}) = 0.8$

– يمثل  $P_{G_n}(G_{n+1})$  احتمال ربح الشوط رقم  $(n+1)$  علماً أنه ربح الشوط رقم  $(n)$

وبالتالي  $P_{G_n}(G_{n+1}) = 0.4$

(2) هناك مسلكان يوافقان الحادث  $G_{n+1}$  وهناك مسلكان يوافقان الحادث  $P_{n+1}$  كما هو موضح في الشجرة وحسب قاعدة احتمال حادث نجد :

$$\begin{cases} x_{n+1} = P(G_{n+1}) = 0.4 \times x_n + 0.2 y_n \\ y_{n+1} = P(P_{n+1}) = 0.6 x_n + 0.8 y_n \end{cases}$$

(3) حسب قاعدة احتمال العقد فإن  $x_n + y_n = 1$  وبالتالي  $P_n = 1$

$$\begin{aligned} W_{n+1} &= 6x_{n+1} - 2y_{n+1} = 6(0.4x_n + 0.2y_n) - 2(0.6x_n + 0.8y_n) \\ &= 6 \times 0.4x_n + 6 \times 0.2y_n - 2 \times 0.6x_n - 2 \times 0.8y_n \\ &= 1.2x_n - 0.4y_n = \frac{12}{10}x_n - \frac{4}{10}y_n = \frac{2}{10}(6x_n - 2y_n) = \frac{1}{5}W_n \end{aligned}$$

لأن  $(W_n)$  هندسية أساسها  $\frac{1}{5}$  وحدها الأول  $W_1$  حيث  $W_1 = 6x_1 - 2y_1$

$$W_1 = 6P(G_1) - 2P(P_1) = 6 \times \frac{1}{2} - 2 \times \frac{1}{2} = 3 - 1 = 2$$

$$\text{لأن } W_n = W_1 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = 2 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

$$x_n = \frac{1}{4} \left[ 1 + \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \right] \text{ ومنه نجد } \begin{cases} 6x_n - 2y_n = 2 \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \\ x_n + y_n = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4} \left[ 1 + \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \right] = \frac{1}{4}$$

ومنه  $(x_n)$  متقاربة نحو  $\frac{1}{4}$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \frac{3}{4}$

لما يكون  $n$  كبيراً بالقدر الكافي فإن احتمال الخسارة أكبر بكثير من احتمال الريح.

تطبيق 30

المجموع تعيين قانون احتمال متغير عشوائي

لدراسة تصرفات الفئران نقوم بتجربة تتمثل في وضع فأر في حجرة لها أربعة أبواب متشابهة، لكن 3 منها مكهربة، في كل مرة يختار هذا الفأر باباً فيجده مكهرباً حيث يتلقى صدمة كهربائية ترجعه إلى مكانه الابتدائي وهكذا حتى يجد الباب الغير المكهرب.

(1) – عين احتمالات الأحداث التالية : علماً أنه ليست للفأر ذاكرة أي احتمال اختياره في كل مرة باباً من الأبواب الأربعة يكون متساوياً :

- $A_1$  « يخرج في المرة الأولى »
- $A_2$  « يخرج في المرة الثانية »
- $A_3$  « يخرج في المرة الرابعة »
- $A_4$  « يخرج في المرة  $n$  »

(2) نفرض أن للفأر ذاكرة كاملة أي في كل مرة يتجنب الباب المكهرب المختارة سابقاً ويختار بشكل متساوي الاحتمال باباً من الأبواب المتبقية.



ولكن  $X$  هو المتغير العشوائي الذي قيمه عدد المحاولات التي قام بها هذا الفار.  
(أ) عين قانون احتمال  $X$ .  
(ب) احسب  $E(X)$  و  $\sigma(X)$ .

✓ الحل

(1) نرمز بـ  $M$  إلى الباب المكهربة و  $N$  إلى الباب الغير مكهربة.  
بما أن الأبواب لها نفس احتمال الاختيار

فإن احتمال اختيار  $M$  هو  $\frac{3}{4}$  واختيار  $N$  هو  $\frac{1}{4}$

(أ) مسلك  $A_1$  هو  $N \rightarrow \frac{1}{4}$  وبالتالي احتماله

$$P(A_1) = \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{1-1} = \frac{1}{4}$$

مسلك  $A_2$  هو  $M \rightarrow \frac{3}{4}$  وبالتالي احتماله

$$P(A_2) = \frac{3}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{2-1} = \frac{9}{16}$$

- هناك مسلك وحيد يمثل  $A_4$  وهو

$N \rightarrow \frac{1}{4} \rightarrow M \rightarrow \frac{3}{4} \rightarrow M \rightarrow \frac{3}{4}$  وحسب قاعدة احتمال حادث

$$P(A_4) = \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{4-1}$$

- هناك مسلك وحيد يمثل  $A_n$  هو :

$$N \rightarrow \frac{1}{4} \rightarrow M \rightarrow \frac{3}{4} \rightarrow M \rightarrow \frac{3}{4} \rightarrow \dots \rightarrow M \rightarrow \frac{3}{4} \rightarrow N \rightarrow \frac{1}{4} \quad (1)$$

$$P(A_n) = \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$

(2) قيم  $X$  هي 1, 2, 3, 4

$$P(X=1) = \frac{1}{4}, \quad P(X=2) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

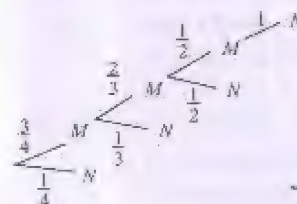
$$P(X=3) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$P(X=4) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{4}$$

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \quad (ب)$$

$$V(X) = \sum_{i=1}^4 x_i^2 P_i - E^2(X) = 1 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{4} + 9 \times \frac{1}{4} + 16 \times \frac{1}{4} - \frac{25}{4}$$

$$= \frac{1+4+9+16-25}{4} = \frac{5}{4} \quad \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$



### تطبيق 31 التعرف على استقلالية متغيرين عشوائيين

نرمي حجري نرد متزنين، ونرمز بـ  $S$  إلى مجموع الرقمين المتحصل عليهما.  
وليكن  $X$  المتغير العشوائي الذي قيمه باقي قسمة  $S$  على 2 و  $Y$  المتغير العشوائي الذي قيمه باقي قسمة  $S$  على 4.

(1) عين قانون  $S$

(2) عين قانوني  $X$  و  $Y$

(3) عين قانون الثنائية  $(X, Y)$  وهل المتغيرين  $X$  و  $Y$  مستقلين؟

✓ الحل

(1) مجموعة قيم  $S$  هي 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12

$S$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P_i$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

عدد الحالات الممكنة هو  $6 \times 6 = 36$

(2) القيم التي يأخذها  $X$  هي 0, 1. القيم التي يأخذها  $Y$  هي 0, 1, 2, 3.  
عدد الحالات الممكنة هو 11 وهي الأعداد من 2 إلى 12

$Y$	0	1	2	3
$P_i$	$\frac{3}{11}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{3}{11}$

قانون احتمال  $Y$

$X$	0	1
$P_i$	$\frac{6}{11}$	$\frac{5}{11}$

قانون احتمال  $X$

وجود الصفر في خانة من جدول قانون احتمال  $(X, Y)$  يستلزم الارتباط.

$Y \backslash X$	0	1	2	3
0	$\frac{3}{11}$	0	$\frac{2}{11}$	0
1	0	$\frac{2}{11}$	0	$\frac{3}{11}$

### تطبيق 32 التعرف على استقلالية متغيرين عشوائيين

علب مرقمة من 1 إلى 4 (هذه الأرقام مخطأة).

العلبة رقم 1 تحتوي على كرة مرقمة بـ 1

والعلبة رقم 2 فيها كرتان مرقمتان 1 و 2.

والعلبة 3 تحتوي على ثلاث كرات مرقمة 1, 2, 3.



والعبة 4 تحتوي على أربع كرات مرقمة من 1 إلى 4  
نختار عشوائياً لعبة وكذا كرة من هذه اللعبة.  
وليكن  $X$  المتغير العشوائي الذي يساوي ترقيم اللعبة. و  $Y$  هو المتغير العشوائي  
الذي يساوي رقم الكرة المختارة.  
(أ) عين قانون احتمال التوزيع  $(X, Y)$  ميرزا قانون  $X$  و  $Y$  على هامشي  
جدولي قانوني  $X$  و  $Y$   
(ب) تحقق أن  $X$  و  $Y$  ليسا مستقلين.

✓ الحل

(أ) قيم  $X$  هي 1، 2، 3، 4 ومجموعة الإمكانات هي 4  
قيم  $Y$  هي 1، 2، 3، 4 ومجموعة الإمكانات هو 10 (10 كرات)

$Y$	1	2	3	4
$P_i$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$

قانون  $Y$

$X$	1	2	3	4
$P_i$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

قانون  $X$

قانون  $(X, Y)$

$X \backslash Y$	1	2	3	4	قانون $X$
1	$\frac{1}{4}$	0	0	0	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{4}$
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
قانون $Y$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	الجموع يساوي 1

$$P((X=x_i) \cap (Y=y_j)) = P(X=x_i) \times \frac{P_j}{(X=x_i)} (Y=y_j)$$

$$P((X=1) \cap (Y=1)) = P(X=1) \times \frac{P_j}{(X=1)} (Y=1) = \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{4}$$

$$P((X=3) \cap (Y=2)) = P(X=3) \times \frac{P_j}{(X=3)} (Y=2) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

وهكذا نملأ جدول قانون احتمال التوزيع  $(X, Y)$

(ب) بما أن  $P(X=1) \cap P(Y=1) = \frac{1}{4}$  و  $P(Y=1) = \frac{4}{10}$  و  $P(X=1) = \frac{1}{4}$

و  $\frac{1}{4} = \frac{4}{10} \times \frac{1}{4}$  فإن التغيرين  $X$  و  $Y$  مرتبطان.  
لاحظ أيضاً وجود الصفر في خانة من خانات جدول قانون  $(X, Y)$  يستلزم أن  $X$  و  $Y$  مرتبطان.

### 33 تطبيق

المبحث الثامن الاحتمالات والوراثة

في مجتمع (الجيل الصغير) مكون من أشخاص، نسبة الأشخاص الذين نمطهم التكويني  $AA$  هي  $P_0$  والذين نمطهم  $Aa$  هي  $q_0$  والذين نمطهم  $aa$  هي  $r_0$ .  
كل زوج من هذا المجتمع يعطي مولوداً نمطه التكويني مشكل من مورثة مأخوذة عشوائياً من نمط الأبوين.

(1) ادرس النمط التكويني للجيل الأول لكل زوج ممكن (على شكل جدول).  
(2) تشكيل الأزواج يحدث عشوائياً، ولنسمي  $P_1, q_1, r_1$  نسب الأشخاص الذين نمطهم التكويني  $AA, Aa, aa$  في الجيل (1).

(أ) بين أن  $P_1 = (P_0 + \frac{1}{2} q_0)^2$  و  $P_1 = (P_0 + \frac{1}{2} q_0)^2$

(ب) تحقق أن  $P_1 - r_1 - P_0 - r_0 = \alpha$

(ج) احسب  $P_1, q_1, r_1$  بدلالة  $\alpha$

(د) احسب  $P_2, q_2, r_2$  بدلالة  $\alpha$  ماذا تستنتج؟

✓ الحل

(أ) الجدول التالي يمثل قانون احتمال التوزيع  $(X, Y)$ :

$X \backslash Y$	$AA$	$Aa$	$aa$
$AA$	$AA$ 100%	$AA, Aa$ 50%, 50%	$Aa$ 100%
$Aa$	$AA, aA$ 50%, 50%	$AA(25\%), Aa(50\%)$ $aa(25\%)$	$Aa, aa$ 50%, 50%
$aa$	$Aa$ 100%	$Aa, aa$ 50%, 50%	$aa$ 100%

(أ) هناك 4 مسالك تؤدي إلى الحادث  $AA$  وهي:

$$\begin{aligned} & \bullet \frac{P_0}{AA} \bullet \frac{q_0}{Aa} \bullet \frac{1}{2} AA \quad , \quad \bullet \frac{P_0}{AA} \bullet \frac{P_0}{AA} \bullet 1 AA \\ & \bullet \frac{q_0}{Aa} \bullet \frac{q_0}{Aa} \bullet \frac{1}{4} AA \quad , \quad \bullet \frac{q_0}{Aa} \bullet \frac{P_0}{AA} \bullet \frac{1}{2} AA \end{aligned}$$

وا احتمال الحادث  $AA$  هو مجموع احتمال كل مسلك وعليه:

$$P_1 = P_0 \times P_0 \times 1 + P_0 \times q_0 \times \frac{1}{2} + q_0 \times P_0 \times \frac{1}{2} + q_0 q_0 \times \frac{1}{4}$$



$E_n$  الحادث « يونس يوقف بواسطة اللون الأحمر أو البرتقالي (O أو R) لعمود المرور رقم n ».

$\bar{E}_n$  الحادث العكسي للحادث  $E_n$ .

نعتبر اللون البرتقالي كالألوان الأحمر وليكن  $r_n$  احتمال  $E_n$  و  $q_n$  احتمال  $\bar{E}_n$ .

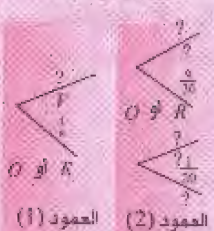
احتمال أن يكون العمود الأول أحمر أو برتقاليا هو  $\frac{1}{8}$ .

واحتمال أن يكون العمود رقم (n+1) أحمر أو برتقاليا إذا كان العمود رقم n

أحمر أو برتقاليا هو  $\frac{1}{20}$ .

واحتمال أن يكون العمود (n+1) أحمر أو برتقاليا إذا كان العمود رقم n

أخضر هو  $\frac{9}{20}$ .



(1) نهتم في هذه الفقرة بالعمودين (1) و (2)

(أ) اكمل الشجرة المجاورة.

(ب) ليكن  $X$  المتغير العشوائي الذي يساوي عدد مررت

ظهور اللون الأخضر في العمودين (1) و (2)

- اعط قانون  $X$  ثم احسب  $E(X)$

(2) نعتبر الحالة العامة.

(أ) اعط الاحتمالات الشرطية  $P_{E_{n-1}}(E_n)$  و  $P_{\bar{E}_{n-1}}(E_n)$

(ب) بملاحظة أن  $E_{n-1} = (E_{n-1} \cap E_n) \cup (\bar{E}_{n-1} \cap E_n)$

بين أن  $P_n = \frac{1}{20} P_{n-1} + \frac{9}{20} q_{n-1}$

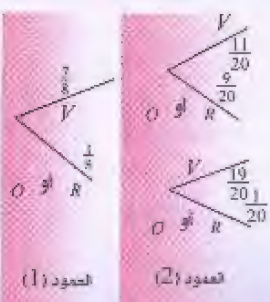
ثم استنتج عبارة  $P_n$  بدلالة  $P_0$

(3)  $(U_n)$  متتالية الأعداد الحقيقية المعرفة على  $\mathbb{N}^*$  بـ  $U_n = 28 P_n - 9$

(أ) بين أن  $(U_n)$  هندسية يطلب تعيين أساسها  $k$ .

(ب) عرّن  $U_n$  بدلالة  $n$  ثم  $P_n$  بدلالة  $n$ .

(ج) عرّن نهاية  $P_n$  إن وجدت ثم اعط تفسيرا لهذه النتيجة.



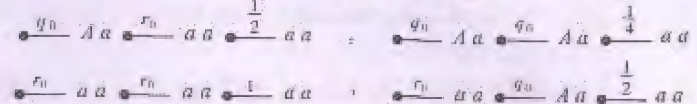
$X$	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{160}$	$\frac{82}{160}$	$\frac{77}{160}$

$$P(X=0) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{20} = \frac{1}{160}$$

$$P(X=1) = \frac{7}{8} \times \frac{9}{20} + \frac{1}{8} \times \frac{19}{20} = \frac{82}{160} = \frac{41}{80}$$

$$= P_0^2 + P_0 q_0 + \frac{1}{4} q_0^2 = (P_0 + \frac{1}{2} q_0)^2$$

- هناك أربعة مسالك تؤدي إلى  $a a$  وهي



واحتمال الحادث  $a a$  هو مجموع احتمال كل مسلك أي :

$$r_1 = q_0 \times q_0 \times \frac{1}{4} + q_0 r_0 \times \frac{1}{2} + q_0 r_0 \times \frac{1}{2} + r_0 \times r_0 = q_0^2 \times \frac{1}{4} + q_0 r_0 + r_0^2 = (r_0 + \frac{1}{2} q_0)^2$$

$$P_1 - r_1 = (P_0 + \frac{1}{2} q_0)^2 - (r_0 + \frac{1}{2} q_0)^2 \quad (ب)$$

$$= (P_0 + \frac{1}{2} q_0 - r_0 - \frac{1}{2} q_0) (P_0 + \frac{1}{2} q_0 + r_0 + \frac{1}{2} q_0)$$

$$= (P_0 - r_0) (P_0 + r_0 + q_0) = P_0 - r_0$$

$$\text{لأن } P_0 + r_0 + q_0 = 1$$

$$P_1 = (P_0 + \frac{1}{2} q_0)^2 = (P_0 + \frac{1}{2} (1 - r_0 - P_0))^2 = (P_0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} r_0 - \frac{1}{2} P_0)^2 \quad (ج)$$

$$= (\frac{1}{2} P_0 - \frac{1}{2} r_0 + \frac{1}{2})^2 = [\frac{1}{2} (P_0 - r_0) + \frac{1}{2}]^2$$

$$= (\frac{1}{2} \alpha + \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} (\alpha + 1)^2$$

$$r_1 = (r_0 + \frac{1}{2} q_0)^2 = [r_0 + \frac{1}{2} (1 - r_0 - P_0)]^2 = (r_0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} r_0 - \frac{1}{2} P_0)^2$$

$$= (\frac{1}{2} r_0 - \frac{1}{2} P_0 + \frac{1}{2})^2 = (-\frac{1}{2} \alpha + \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} (1 - \alpha)^2$$

$$\text{لدينا } q_1 = 1 - P_1 - r_1 = 1 - \frac{1}{4} (1 + \alpha)^2 - \frac{1}{4} (1 - \alpha)^2 = \frac{1}{2} (1 - \alpha) (1 + \alpha)$$

(د) إذا افترضنا أن الجيل الأول هو بمثابة الجيل الصفر والجيل الثاني بمثابة الجيل الأول فإنه ينتج

$$\text{لدينا، } r_2 = (r_1 + \frac{1}{2} q_1)^2 \text{ و } P_2 = (P_1 + \frac{1}{2} q_1)^2 \text{ و } P_2 - r_2 = P_1 - r_1 = \alpha$$

$$\text{وهذا يعني أن } r_2 = \frac{1}{4} (1 - \alpha)^2 \text{ و } P_2 = \frac{1}{4} (\alpha + 1)^2$$

نستنتج أن نسب الأنماط  $Aa : Aa : Aa$  تبقى ثابتة في كل الأجيال.

### تطبيق 34 الاحتمالات الشرطية والمتتاليات

ذهب يونس إلى مدينة كبيرة لقضاء عطلة، حيث يقطع الشارع الرئيسي الذي يكتظ بأعمدة إشارة المرور الكهربائية الثلاثية اللون (أحمر - برتقالي - أخضر). نعتبر من أجل كل  $n \geq 1$  الحادثين التاليين :



$$P(X=2) = \frac{7}{8} \times \frac{11}{20} = \frac{77}{160}$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^3 x_i P_i = \frac{82}{160} + \frac{77 \times 2}{160} = \frac{236}{160} = \frac{59}{40}$$

$$P_{E_n}(E_{n+1}) = \frac{9}{20} \text{ و } P_{\bar{E}_n}(E_{n+1}) = \frac{1}{20} \quad (2)$$

ب) الحادثان  $E_{n+1} \cap E_n$  و  $E_{n+1} \cap \bar{E}_n$  غير متلائمين وبالتالي :

$$P_{n+1} = P(E_{n+1}) = P(E_{n+1} \cap E_n) + P(E_{n+1} \cap \bar{E}_n) \\ = P(E_n) \times P_{E_n}(E_{n+1}) + P(\bar{E}_n) \times P_{\bar{E}_n}(E_{n+1}) = \frac{1}{20} P_n + \frac{9}{20} q_n$$

- استنتاج عبارة  $P_{n+1}$  بدلالة  $P_n$  :

$$\text{لدينا } P_n + q_n = 1 \text{ إذن } P_n + \frac{9}{20} (1 - P_n) = \frac{1}{20} P_n + \frac{9}{20}$$

$$P_{n+1} = \frac{-8}{20} P_n + \frac{9}{20} = -\frac{2}{5} P_n + \frac{9}{20}$$

$$U_{n+1} = 28 P_{n+1} - 9 = 28 \left( -\frac{2}{5} P_n + \frac{9}{20} \right) - 9 \quad (3)$$

$$= -\frac{56}{5} P_n + \frac{18}{5} = -\frac{2}{5} (28 P_n - 9) = -\frac{2}{5} U_n$$

إذن  $(U_n)$  هندسية أساسها  $k = -\frac{2}{5}$

$$U_n - U_1 \times k^{n-1} = \left( -\frac{11}{2} \right) \times \left( -\frac{2}{5} \right)^{n-1}$$

$$P_n = \frac{1}{28} \left[ -\frac{11}{2} \left( -\frac{2}{5} \right)^{n-1} + 9 \right] = \frac{11}{56} \left( -\frac{2}{5} \right)^{n-1} + \frac{9}{28}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = \frac{9}{28}$$

عندما يجتاز يونس هذه المدينة فإن احتمال توقيفه بواسطة عمود مع العلم أنه اجتاز

العمود الأول هو  $\frac{9}{28}$ .

## تمارين ومسائل

1 - نرمي حجري نرد لونييهما على التوالي أخضر وأبيض، ونشكل عددا من رقمين، حيث أن رقم العشرات هو الرقم الظاهر على الحجر الأخضر ورقم الآحاد هو الرقم الظاهر على الحجر الأبيض.

(1) كم من عدد يمكن تشكيله ؟

(2) لتكن الأحداث التالية :

A " العدد المشكل يقبل القسمة على 5 "

B " العدد المشكل أكبر تماما من 36 "

C " العدد المشكل محصور بين 14 و 32 "

احسب احتمالات كل من الحوادث التالية :

$$A \cup C, A \cap C, B \cup C, B \cap C, A \cup B, A \cap B, C, B, \bar{B}, A$$

2 - نعتبر A و B حادثين بحيث  $P(A) = 0,8$  و  $P(B) = 0,4$

(1) هل  $P(A \cap B) = 0,1$  ؟

(2) ماذا يحدث لو كانت  $P(A \cap B) = 0,2$  أو  $P(A \cap B) = 0,4$  ؟

(3) إلى أي مجال ينتمي  $P(A \cap B)$  ؟

3 - كيس يحتوي على 5 كرات ثلاث منها بيضاء والأخرى سوداء، ن سحب عشوائيا وفي آن واحد كرتين من هذا الكيس، وليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات السوداء المسجوبة.

(1) عين مجموعة قيم X.

(2) عين قانون احتمال X ثم احسب  $E(X)$  و  $\sigma(X)$ .

4 - إليك قانون احتمال متغير عشوائي Y :

Y	-1	1	1	2	3
P	0,03	0,17	0,4	a	b

احسب a بحيث  $E(Y) = 0$  ثم عين  $\sigma(Y)$ .



(3) احسب  $P(A \cap \bar{B})$  و  $P(\bar{A} \cap \bar{B})$  ثم احسب  $P(\bar{B})$  بطريقتين مختلفتين.

(4) احسب  $P_B(A)$ .

10 - كيس يحتوي على ثلاث كرات سوداء وكرتين بيضاويتين نسحب عشوائيا كرتين الواحدة تلو الأخرى بدون إرجاع، وليكن  $E$  الحادث " الكرة الأولى بيضاء " و  $F$  الحادث " الكرة الثانية سوداء ".

(1) احسب  $P(E)$ ،  $P_F(F)$  و  $P(E \cap F)$  في كل حالة من الحالتين التاليتين :

(أ) نسحب الكرة ونسجل لونها ثم نرجعها إلى الكيس.

(ب) نسحب الكرة ونسجل لونها ولا نرجعها إلى الكيس.

(2) ما هو احتمال الحادث  $B$  "الكرتان مختلفتا اللون" في كل حالة من الحالتين السابقتين ؟

11 - في مجموعة لدينا 40% من عناصرها تمارس لعبة كرة قدم، و 60% من عناصر هذه المجموعة هم رجال وأن 30% منهم لا يمارسونها. ما هو احتمال أن امرأة مختارة عشوائيا لا تمارس هذه اللعبة ؟

12 - أعطت دراسة أجراها مسير مؤسسة لنشر الكتب أن عدد الكتب المباعة في كل شهر تتبع قانون الاحتمال التالي :

$n$	0	200	500	800	1000	2000
$p$	0,04	0,16	0,4	0,25	0,09	0,06

نعتبر أن مبيعات كل شهر مستقلة عن مبيعات الشهور الأخرى

احسب احتمال الأحداث التالية :

(1) "بيع 800 كتاب في جانفي و 500 كتاب في فيفري"

(2) "بيع 2000 في سبتمبر و 1000 في أكتوبر و 500 في نوفمبر"

(3) "بيع 2000 كتاب خلال الثلاثي الأخير من السنة."

13 - حجري نرد، الأول مرقم ب 1، 2، 2، 3، 3، 3 والثاني مرقم ب 1، 1، 2، 2، 3، 3 وليكن  $X$  التغير العشوائي الذي يرفق بكل رمية للحجرين القيمة المطلقة لفرق الرقمين المسجلين عليهما.

نقبل أن كل الأوجه لها نفس حظ الظهور لكلا الحجرين.

(1) ما هي قيم  $X$  الممكنة ؟

(2) عين قانون احتمال  $X$  ثم احسب  $E(X)$  و  $\sigma(X)$

(3) إذا علمت أن  $X=0$  ما هو احتمال التحصل على الرقم 1 على كل حجر ؟

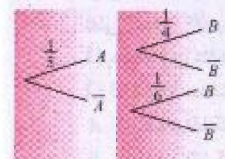
5 - لتكن  $A$ ،  $B$ ،  $C$  ثلاثة حوادث.

(1) إذا علمت أن  $P(A) = \frac{1}{2}$  و  $P(B) = \frac{1}{4}$  و  $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$

احسب  $P(A \cap B)$  و  $P_A(B)$  و  $P_B(A)$

(2) إذا علمت أن  $P(A) = \frac{1}{3}$  و  $P(B) = \frac{1}{4}$  و  $P_A(B) = \frac{1}{2}$  احسب  $P(B)$ .

(3) بين أن  $P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B)$ .



6 - باستعمال معطيات الشجرة احسب :

$P_A(\bar{B})$  و  $P_A(B)$ ،  $P(\bar{A})$

ثم استنتج  $P(A \cap B)$ ،  $P(A \cap \bar{B})$  و  $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ .

7 - بعد عملية لصير الأراء في ثانوية تحتوي على 60% إناث و 40% ذكور علمنا أن 40% من الإناث و 20% من الذكور يتكلمون الانجليزية.

(1) انقل ثم اكمل الشجرة النقلة المجاورة :

(2) نختار عشوائيا طالبا من الثانوية ونسمي  $C$  الحادث " بنت "

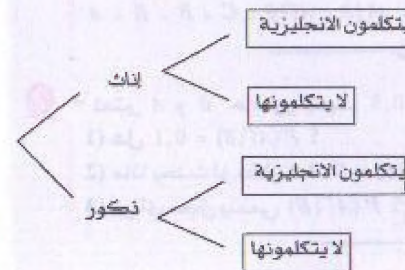
و  $E$  الحادث " ذكر "

و  $A$  الحادث " يتكلم الانجليزية "

(أ) احسب احتمال الحادثين  $C \cap A$

و  $E \cap A$  ثم استنتج قيمة  $P(A)$ .

(ب) احسب  $P_A(C)$ .

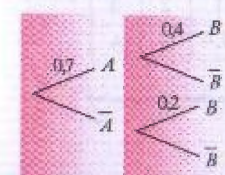


8 - كيس يحتوي على 5 كرات ثلاث منها سوداء مرقمة 1، 2، 3 والأخرتين بيضاويتين مرقمتين ب 1 و 2، نسحب عشوائيا في آن واحد كرتين من هذا الكيس.

(1) ما هو احتمال الحادث  $A$  "الكرتان السحويتان لهما نفس اللون" (استعمل قانون العد) ؟

(2) ما هو احتمال الحادث  $B$  " مجموع الرقمين المسجلين على الكرتين السحويتين يساوي 5 " ؟

(3) ما هو احتمال  $B$  علما أن  $A$  محقق ؟



9 - نعتبر الحادثين  $A$  و  $B$  لتجربة عشوائية.

ولدينا شجرة الاحتمالات التالية الموافقة لهذه التجربة :

(1) اعط تفسيرا للأعداد 0,7، 0,4، 0,2

ثم اكمل هذه الشجرة.

(2) احسب  $P(A \cap B)$  و  $P(\bar{A} \cap B)$  ثم استنتج  $P(B)$ .



14 - كيس  $U$  يحتوي على كرة بيضاء وثلاث كرات حمراء وكيس  $V$  يحتوي على 5 كرات بيضاء وثلاث كرات حمراء.

نسحب عشوائيا كرة من كلا الكيسين ونبدل لهما الكيس. احسب احتمال الحادثين التاليين:

- A "الكيس  $U$  لا يحتوي إلا على الكرات الحمراء"  
B "كلا الكيسين يحتفظ بنفس التركيبة الأولى".

15 - لدينا قطعة نقدية مزيفة بحيث احتمال ظهور الظهر هو  $\frac{2}{3}$ .

ولكن  $U$  و  $V$  كيسان بحيث:

الكيس  $U$  يحتوي على 5 قصاصات حمراء و 4 خضراء.

والكيس  $V$  يحتوي على ثلاث قصاصات حمراء وقصاصتين خضراوتين.

نرمي القطعة النقدية بحيث إذا ظهر الظهر نسحب قصاصة من الكيس  $U$  وفي حالة العكس نسحب القصاصات من  $V$ .

ما هو احتمال التحصل على قصاصة حمراء؟

16 - لدينا حجر نرد متزن حيث أن أوجهه مرقمة من 1 إلى 6.

ولدينا ثلاثة أكياس  $U_1$ ،  $U_2$ ،  $U_3$  كل واحد منها يشمل  $k$  كرة حيث  $k$  عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 3. وأن هذه الكرات لا نستطيع أن نفرق بينها عند اللمس.

يحتوي  $U_1$  على ثلاث كرات سوداء

و  $U_2$  يحتوي على كرتين سوداوتين

و  $U_3$  على كرة سوداء، وكل الكرات الأخرى الموجودة في الأكياس بيضاء.

حيث يقوم لاعب برمي النرد:

- إذا تحصل على الرقم 1 يسحب عشوائيا كرة من الكيس  $U_1$  مسجلا لونها ثم يرجعها إليه.

- إذا تحصل على مضاعف 3 يسحب عشوائيا كرة من  $U_2$  مسجلا لونها ثم يرجعها إليه

- إذا تحصل على رقم يختلف عن 1 وليس مضاعفا لـ 3 يسحب عشوائيا من الكيس  $U_3$  كرة مسجلا لونها ثم يرجعها إليه.

لتكن الأحداث  $A$ ،  $B$ ،  $C$ ،  $N$  المعرفة كما يلي:

A "نتحصل على الرقم 1 عند رمي الحجر"

B "نتحصل على مضاعف 3 عند رمي الحجر"

C "نتحصل على الرقم يختلف عن 1 وليس مضاعفا لـ 3"

N "الكرة المسحوبة سوداء"

(اللاعب يلعب شوطا واحدا).

(1) بين أن احتمال تحضله على كرة سوداء يساوي  $\frac{5}{3k}$ .

(2) احسب احتمال أن يظهر الرقم 1 على الحجر علما أن الكرة المسحوبة سوداء.

(3) عين  $k$  بحيث يكون احتمال الحصول على كرة سوداء أكبر من  $\frac{1}{2}$ .

(4) عين  $k$  بحيث يكون احتمال التحصل على كرة سوداء يساوي  $\frac{1}{3}$ .

17 - ثلاثة صيادين  $C_1$ ،  $C_2$ ،  $C_3$  يطلقون النار في آن واحد على أرنب ويصفية مستقلة عن بعضهم البعض، وليكن  $P_1$ ،  $P_2$ ،  $P_3$  احتمالات إصابة الصيادين  $C_1$ ،  $C_2$ ،  $C_3$  للأرنب على التوالي.

احسب احتمال إصابة الأرنب على الأقل من طرف صياد واحد.

يعطي  $P_1 = 0.15$ ،  $P_2 = 0.20$ ،  $P_3 = 0.35$ .

18 - لنعتبر ثلاثة أكياس  $U_1$ ،  $U_2$ ،  $U_3$ .

الكيس  $U_1$  يحتوي على كرتين سوداوتين وثلاث كرات حمراء.

والكيس  $U_2$  يحتوي على كرة سوداء و 4 حمراء.

و  $U_3$  يحتوي على ثلاث كرات سوداء و 4 حمراء.

تتمثل التجربة في سحب كرة عشوائيا من  $U_1$  وأخرى من  $U_2$  ووضعهما في  $U_3$ ، ثم سحب كرة عشوائيا من  $U_3$ .

من أجل كل  $i$  من  $\{1, 2, 3\}$  نرمز بـ:

$N_i$  إلى الحادث سحب كرة سوداء من الكيس  $U_i$

و  $R_i$  إلى الحادث سحب كرة حمراء من  $U_i$ .

(1) انقل ثم اكمل الشجرة المجاورة:

(2-1) احسب احتمال الأحداث التالية:

$N_1 \cap R_2 \cap N_3$  و  $N_1 \cap N_2 \cap N_3$

(ب) استنتج احتمال الحادث  $N_1 \cap N_3$

(ج) احسب بنفس الطريقة احتمال الحادث  $R_1 \cap N_3$

(3) استنتج من السؤال (3) احتمال الحادث  $N_3$

(4) هل الحادثان  $N_3$  و  $N_1$  مستقلان؟

(5) إذا علمت أن الكرة المسحوبة من  $U_3$  سوداء فما هو احتمال أن تكون الكرة المسحوبة من  $U_1$  حمراء؟

19 - موظف يلتحق بعمله بواسطة حافلة موضوعة تحت تصرف العمال وهذا إذا وصل في وقت مرورها وفي حالة تأخره يركب حافلة ثمن التذكرة فيها هو  $1.5DA$ .

- إذا كان هذا الموظف في الوقت المناسب في يوم ما فإن احتمال أن يتأخر في اليوم الموالي هو  $\frac{1}{5}$ .

- إذا تأخر في يوم ما فإن احتمال أن يتأخر في اليوم الموالي هو  $\frac{1}{20}$ .



من أجل عند طبيعي  $n$  غير معلوم نرمز بـ  $R_n$  إلى الحادث "لوظف متأخر في اليوم  $n$ "

وليكن  $P_n$  احتمال  $R_n$  و  $q_n$  احتمال  $\bar{R}_n$  نضع  $P_1 = 0$

(1) ا عين الاحتمالات الشرطية التالية :

$$P_{R_n}(R_{n+1}) \text{ و } P_{\bar{R}_n}(R_{n+1})$$

(ب) عين  $P(R_{n+1} \cap R_n)$  بدلالة  $P_n$  و  $P(R_{n+1} \cap \bar{R}_n)$  بدلالة  $q_n$

(ج) عبر عن  $P_{n+1}$  بدلالة  $P_n$  و  $q_n$  ثم استنتج أن  $P_{n+1} = \frac{1}{5} - \frac{3}{20} P_n$

(2) من أجل لكل عند طبيعي غير معدوم نضع  $V_n = P_n - \frac{4}{23}$

(أ) بين أن  $(V_n)$  متتالية هندسية أساسها  $(\frac{-3}{20})$ .

(ب) عبر عن  $V_n$  ثم  $P_n$  بدلالة  $n$ .

(ج) بين أن المتتالية  $(P_n)$  متقاربة معينة نهايتها.

20 - شركة تكلف مؤسسة مختصة في صبر الأراء بواسطة الهاتف للتحقيق حول نوعية

منتوجها، كل محقق له قائمة أشخاص يتصل بهم، أثناء المكالمات الهاتفية الأولى احتمال أن يكون المهتوف إليه غائبا هو 0,4 .

- إذا علمت أن المهتوف إليه حاضر فإن احتمال أن يقبل الإجابة على الأسئلة هو 0,2

(1) ليكن  $A_1$  الحادث "الشخص المهتوف إليه غائب في المكالمة الأولى"

$R_1$  الحادث "الشخص يقبل الإجابة على الأسئلة خلال المكالمة الأولى"

ما هو احتمال  $R_1$  ؟

(2) إذا كان الشخص غائبا أثناء المكالمة الأولى فإننا نهاتفه مرة ثانية في ساعة أخرى

عندئذ فإن احتمال أن يكون غائبا هو 0,3 وإذا علمنا أنه إذا كان حاضرا في المكالمة

الثانية فإن احتمال أن يقبل الإجابة على الأسئلة هو 0,2 .

- إذا كان الشخص غائبا خلال المكالمة الثانية نحاول الاتصال به مرة أخرى وليكن  $A_2$

الحادث "الشخص غائب أثناء المكالمة الثانية" و  $R_2$  "الشخص يقبل الإجابة على الأسئلة

المطروحة خلال المكالمة الثانية".

$R$  هو الحادث "الشخص يقبل الإجابة على الأسئلة"

بين أن احتمال  $R$  هو 0,176 (استعمل الشجرة).

(3) إذا علمت أن الشخص قبل الإجابة على الأسئلة فما هو احتمال أن تكون الإجابة

خلال المكالمة الأولى ؟

21 -  $A$  و  $B$  حادثان بحيث  $P(A) = \frac{3}{7}$  و  $P(A \cup B) = \frac{5}{7}$  و  $P(B) = a$

(أ) احسب  $a$  في كل حالة من الحالات التالية :

(أ)  $A$  و  $B$  غير متلائمان.

(ب)  $A$  محتواة في  $B$

(ج)  $A$  و  $B$  مستقلان.

(2) في كل حالة من الحالات السابقة احسب  $P_A(B)$  و  $P_B(A)$

22 - في قسم يحتوي على 30 تلميذا، شكل ناديين للتصوير والمسرح.

نادي التصوير مشكل من 10 أشخاص والآخر من 6 أشخاص.

هناك تلميذان عضوان في كلا الناديين.

(1) نسال تلميذا من القسم مأخوذ عشوائيا ونسمي :

$P$  الحادث "التلميذ ينتمي إلى نادي التصوير"

$T$  الحادث "التلميذ ينتمي إلى نادي المسرح"

بين أن  $P$  و  $T$  مستقلان.

(2) أثناء حصة لنادي التصوير كل الأعضاء حاضرين، نختار تلميذا عشوائيا ليقوم

بتصوير عضو ثان مختارا عشوائيا.

(أ) نسمي  $T_1$  الحادث "التلميذ الأول المختار ينتمي إلى نادي المسرح" احسب  $P(T_1)$

(ب) نسمي  $T_2$  الحادث "التلميذ الذي أخذت صورته ينتمي إلى نادي المسرح"

احسب  $P_{T_1}(T_2)$  و  $P_{\bar{T}_1}(T_2)$  ثم استنتج  $P(T_2 \cap T_1)$  و  $P(T_2 \cap \bar{T}_1)$

(نستطيع استعمال شجرة الاحتمالات).

(ج) بين أن احتمال أن يكون التلميذ الذي أخذت صورته ينتمي إلى نادي المسرح هو 0,2

23 - لعبة تتمثل في سحب ثلاث كرات عشوائيا في آن واحد من كيس يحتوي على 5

كرات حمراء و 5 خضراء.

- إذا تحصل اللاعب على ثلاث كرات حمراء نسمي هذا الحادث  $R_3$  ويتحصل من

خلاله على 50 دج .

- إذا تحصل على كرتين حمراوين و كرة خضراء نسمي هذا الحادث  $R_2$  ويتحصل

من خلاله على 30 دج.

- و في الأخير إذا تحصل على أقل من كرتين حمراوين نسمي هذا الحادث  $E$  و لا

يتحصل على أية مكافئة.

(1) بين أن احتمال الحادثين  $R_2$  و  $R_3$  هما  $P(R_2) = \frac{5}{12}$  و  $P(R_3) = \frac{1}{12}$

(استعمل قانون العد).

(2) ليكن  $X$  المتغير العشوائي الذي قيمه ربح اللاعب، اعط قانون احتمال  $X$  معينة

$E(X)$  و  $\sigma(X)$ .

24 - يقوم أحمد برميات متتالية لرمح، عندما يُصيب الهدف في رمية فإن احتمال أن

يُصيبه في الرمية الموالية هو  $\frac{1}{3}$  وعندما لا يُصيب الهدف في رمية فإن احتمال أن لا

يُصيبه في الرمية الموالية هو  $\frac{4}{5}$



نفرض أن له في الرمية الأولى نفس حظوظ إصابة الهدف أو عدم إصابته.

من أجل كل عدد طبيعي  $n$  موجب تماماً نعتبر الأحداث التالية ،

"  $A_n$  الحادث " أحمد يصيب الهدف في الرمية  $n$  "

"  $B_n$  الحادث " أحمد لا يصيب الهدف في الرمية  $n$  "

نضع  $P_n = P(A_n)$

(1) احسب  $P$  و بين أن  $P_2 = \frac{4}{15}$

(2) بين أنه من أجل كل عد طبيعي  $n \geq 2$  لدينا  $P_n = \frac{2}{15} P_{n-1} + \frac{1}{5}$

(3) من أجل كل  $n \geq 1$  نضع  $U_n = P_n - \frac{3}{13}$

بين أن  $(U_n)$  هندسية يطلب إيجاد أساسها و هو حدها الأول  $U_1$

(4) اكتب  $U_n$  ثم  $P_n$  بدلالة  $n$  ثم احسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$

25 - الجدول التالي يعطينا قانون

احتمال الثنائية  $(X, Y)$  لتغير

عشوائي ،

(1) اكمل الجدول.

(2) هل المتغيرين  $X$  و  $Y$  مستقلان؟

$X \backslash Y$	0	1	2	$X$ قانون
0	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	
1	$\frac{17}{60}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{24}$	
$Y$ قانون				

26 - الجدول التالي يعطينا قانون احتمال الثنائية

$(X, Y)$  لتغيرين عشوائيين.

هل المتغيرين العشوائيين  $X$  و  $Y$  مستقلان؟

$X \backslash Y$	0	1
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

27 -  $X$  و  $Y$  متغيران عشوائيان معرفان على مجموعة  $E$  بـ :

$$Y(E) = \{y_1, y_2, y_3, \dots, y_r\} \quad X(E) = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_r\}$$

$$T = X \times Y \quad \text{و} \quad Z = X + Y$$

(1) بين أن  $E(Z) = E(X) + E(Y)$

(2) بين أنه إذا كان  $X$  و  $Y$  مستقلين فإن  $E(T) = E(X) \times E(Y)$

(3) بين أنه إذا كان  $X$  و  $Y$  مستقلين فإن  $V(Z) = V(X) + V(Y)$

28 - نعتبر قطعتين تقلييتين مخشوشتين  $p_1$  و  $p_2$  :

عندما نرمي القطعة  $p_1$  فإن احتمال الحصول على الظهر هو  $\frac{2}{3}$ .

عندما نرمي القطعة  $p_2$  فإن احتمال الحصول على الوجه هو  $\frac{2}{9}$ .

في الشوط الأول من اللعبة نختار قطعة عشوائياً ثم نرميها.

إذا تحصلنا على الوجه نلعب الشوط الثاني بالقطعة  $p_1$  وإذا تحصلنا على الظهر نلعب

الشوط الثاني بالقطعة  $p_2$ .

ونطبق قاعدة اللعب التالية :

من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير معدوم.

- إذا تحصلنا على الوجه في الشوط رقم  $n$  فإننا نلعب الشوط رقم  $(n+1)$  بالقطعة  $p_1$

وإذا تحصلنا على الظهر في الشوط رقم  $n$  فإننا نلعب الشوط رقم  $(n+1)$  بالقطعة  $p_2$ .

نسمي  $f_n$  احتمال الحصول على الوجه في الشوط رقم  $n$  :

(1) احسب  $f_1$  و  $f_2$  .

(2) بين أنه من أجل كل  $n \geq 1$  فإن  $f_{n+1} = \frac{1}{2} f_n + \frac{2}{9}$

(3) لكن  $(U_n)$  متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n \geq 1$  بـ  $U_n = f_n - \frac{1}{4}$

(أ) برهن أن المتتالية  $(U_n)$  بدلالة  $n$  ، ثم استنتج عبارة  $f_n$  بدلالة  $n$  .

(4) من أجل كل عدد طبيعي  $n \geq 1$  نسمي  $X_n$  المتغير العشوائي الذي يأخذ القيمة 1 إذا

كانت النتيجة في الشوط رقم  $n$  هي الوجه و 0 إذا كانت غير ذلك.

(أ) عين قانون احتمال المتغيرين  $X_1$  و  $X_2$  .

(ب) احسب الأمل الرياضي لـ  $X_1$  و  $X_2$  .

(ج) هل المتغيرين  $X_1$  و  $X_2$  مستقلان؟